

FASE GEOMÉTRICA DE QUBIT SUPERCONDUCTORES EN PRESENCIA DE RUIDO EXTERNO

Paula I. Villar^{1,2}

¹Departamento de Física, FCEyN, UBA, Pabellón 1, Ciudad Universitaria,
1428 Buenos Aires, Argentina.

²Instituto de Física de Buenos Aires, UBA CONICET, Pabellón 1, Ciudad Universitaria,
1428 Buenos Aires, Argentina
(Email: paula@df.uba.ar)

Resumen

En el estudio y realización de la Información Cuántica, las fases tienen un rol importante ya que pueden codificar información del estado. La mayoría de los estudios en este área están enfocados en conocer los efectos dinámicos que se producen al manipular la información. Alternativamente, uno podría aprovechar la existencia de estas fases, ya que en algunos casos han demostrado ser robustas frente a diferentes “fallas” del sistema. En este trabajo presento cómo se puede estudiar la fase geométrica en el marco de la dinámica de sistemas cuánticos abiertos, donde la evolución del sistema está plagada de efectos no-unitarios como decoherencia y disipación. En particular, propongo el estudio de la fase geométrica de un qubit superconductor en presencia de ruido de alta y baja frecuencia.

Palabras clave: Fases geométricas, decoherencia, qubits superconductores.

Abstract

Geometric phase in a solid-state-qubit under external noise. In Quantum Information science, the phase of a wavefunction plays an important role in encoding information. While most experiments in this field rely on dynamic effects to manipulate this information, an alternative approach is to use the geometric phase, which has been argued to have potential fault tolerance. In this manuscript, I present an approach to study the geometric phase in the framework of open quantum systems, where the system's evolution is plagued by non-unitary effects like decoherence and dissipation. Particularly, I propose the study of the accumulated geometric phase of a solid-state qubit in the presence of low and high-frequency noise.

Key words: Geometric phases, decoherence, superconducting qubits.

Sistemas cuánticos abiertos

Los efectos de interferencia son la característica más notable de la Mecánica Cuántica. El experimento de dos rendijas (o de Young) es generalmente usado como el punto de partida para hacer una descripción cuántica de la Naturaleza. Supongamos el siguiente experimento de interferencia: una fuente de luz F, de un sólo color y tenue (un fotón a la vez), que ilumina un detector D. En el camino, es decir, entre la fuente y el detector, se coloca una pantalla con dos pequeños orificios, A y B, separados apenas unos milímetros de distancia. Si la fuente y el detector están separados 100 cm, los orificios deben ser menores que 1 décimo de milímetro. Si cerramos el orificio B, obtenemos un cierto número de clics en el detector D, que representa el número de fotones que llegan pasando por A (supongamos que el detector detecta 1 de cada 100 fotones que salen de F, es decir 1%). Si, por el contrario, tapamos el orificio A, y destapamos B, obtendremos aproximadamente el mismo número de clics. Si destapamos ambos orificios, la respuesta es más complicada. Si éstos están separados cierta distancia, obtenemos más clics que lo esperado: 4% en vez de 2% (este último valor corresponde a la suma de las probabilidades clásicas). Esto se debe a la contribución de las interferencias cuánticas. Si, en cambio, están separados alguna otra distancia, no obtenemos ningún fotón en el detector. Guiados por nuestra intuición, hubiésemos esperado que la cantidad de luz que llega al detector aumentara si ambos orificios están destapados. Pero no sucede así, es decir, resulta incorrecto pensar que la luz “va por un camino o el otro”.

Ahora, supongamos una pequeña variación a este sencillo experimento de interferencia. Le agregamos un detector a cada orificio, capaz de indicar cuándo un fotón pasa por él. De esta manera, podemos saber por cuál

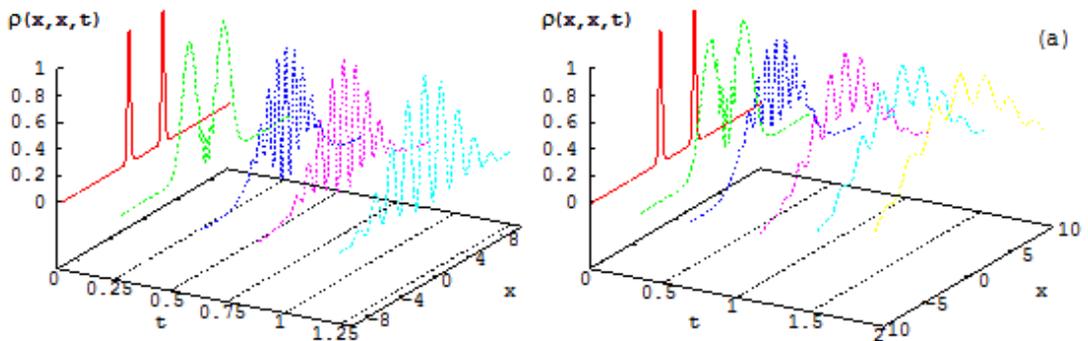


Fig.1. Distintos patrones de interferencia para un experimento con partículas. Las curvas muestran el patrón para distintos tiempos. La Figura de la izquierda, es el sistema cerrado. A la derecha, el sistema está abierto y las interferencias cuánticas se atenúan a los mismos tiempos de la evolución.

orificio (A o B) pasa cada fotón cuando ambos orificios están destapados. Ya que la probabilidad de que un fotón viaje de F a D depende de la distancia entre

orificios, quizás existe alguna forma extraña, para que ambos detectores, en A y B, suenen juntos de modo de indicar la contribución de las interferencias. Sin embargo, lo que sucede es lo siguiente: los detectores en A y B no suenan nunca juntos; suena A ó suena B. El fotón no se divide en dos; es decir, elige un sólo camino. Ahora sí corresponde asumir que “va por un camino o el otro”. El experimento ha sido modificado de manera no trivial y la cantidad de luz que llega a D es simplemente la suma de las cantidades por separado, es decir 2%. Las interferencias cuánticas desaparecen cuando colocamos los detectores en A y B, y obtenemos un resultado clásico. Así es como funciona la Naturaleza: si colocamos instrumentos para determinar el camino que recorre la luz, conocemos el orificio por el cual ésta pasó, pero las interferencias cuánticas son destruidas y el resultado obtenido es de naturaleza clásica. Sin embargo, si no los colocamos, no podemos saber cuál fue el camino recorrido, pero el resultado es de naturaleza puramente cuántica, con las interferencias jugando un rol importante en la cantidad de luz que alcanza al detector D.

Este experimento sencillo pone de manifiesto las diferentes evoluciones de los sistemas cuánticos cerrados y abiertos. Cuando no colocamos detectores en los orificios, nuestro sistema cuántico evoluciona libremente y de manera unitaria, aislado de cualquier influencia del mundo exterior. El resultado es puramente cuántico y el principio de superposición tiene validez. Sin embargo, cuando colocamos los detectores, nuestro sistema cuántico original está en interacción con los detectores, y la evolución del sistema deja de ser unitaria, ya que el entorno (los detectores en este caso) modifica dicha evolución. Las interferencias cuánticas son simplemente destruidas por la presencia del entorno. El tipo de experimento de interferometría mencionado al comienzo, también se ha realizado con objetos materiales con el fin de comprobar la dualidad luz-materia que predice la Mecánica Cuántica. Esta propiedad ya ha sido demostrada para electrones, neutrones y átomos. En la Fig. 1 se muestra el patrón de interferencia que resulta de una simulación de un experimento de dos rendijas. A la izquierda vemos un patrón de máximos y mínimos bien definidos a medida que evolucionan los paquetes gaussianos iniciales. Sin embargo, a la derecha, notamos que las franjas están atenuadas, o incluso tienden a desaparecer a tiempos largos. En general, esta ausencia de interferencia cuántica entre estados macroscópicamente distinguibles se puede explicar como consecuencia de un proceso de pérdida de coherencia o decoherencia. Este proceso considera como aspecto fundamental que los sistemas cuánticos macroscópicos no están aislados. Es decir, la “clasicidad” de un sistema resulta una propiedad emergente del mismo, debido a la interacción con un entorno. Para un sistema cuántico, la presencia de un entorno resulta un factor fundamental al momento de estudiar su dinámica. Asimismo, es importante resaltar que desde un punto de vista práctico, todos los sistemas reales interactúan con un entorno en mayor o menor medida. Esto significa que la evolución cuántica del sistema está plagada de efectos no-unitarios como disipación y decoherencia. En particular, la decoherencia es el mayor obstáculo en el estudio de la información y computación cuántica.

Fase geométrica en sistemas cuánticos abiertos

Como he mencionado al inicio, los sistemas cuánticos tienen la capacidad de retener la información de sus movimientos en el espacio de Hilbert a través de la adquisición de una fase geométrica. El primero en proponer el concepto de fase geométrica fue Pancharatnam en óptica [1] y luego Berry estudió este concepto para un sistema cuántico [2]. Berry demostró que los sistemas cuánticos podían adquirir una fase de naturaleza topológica durante una evolución adiabática, además de la fase dinámica usualmente conocida. Su importancia radica en ser un fenómeno cuántico relacionado a la evolución adiabática de un sistema, que depende sólo de la geometría del camino y no del camino mismo. Desde entonces, su aplicación ha sido propuesta para estudiar diferentes sistemas como por ejemplo NMR, junturas Josephson y trampas de iones. La idea original de Berry fue posteriormente generalizada en varios aspectos. Mientras que la mayoría de los estudios han sido para estados puros, algunos pocos se han concentrado en analizar esta fase para el caso de estados mixtos, probablemente motivados en la implementación de qubits. La noción de fase geométrica ha sido extendida a casos abelianos y no abelianos. Al resultar un factor tan importante en la construcción de compuertas cuánticas geométricas, la necesidad de extender este concepto a estados mixtos y evoluciones no unitarias se volvió imperiosa. Recientemente, se ha sugerido que debiera ser posible observar la fase de Berry (FB) en una estructura superconductor [3], y posiblemente, usarla para controlar la evolución de un estado cuántico [4].

Las fases geométricas están relacionadas al concepto clásico de transporte paralelo de un vector sobre una superficie curvada. Si, por ejemplo,

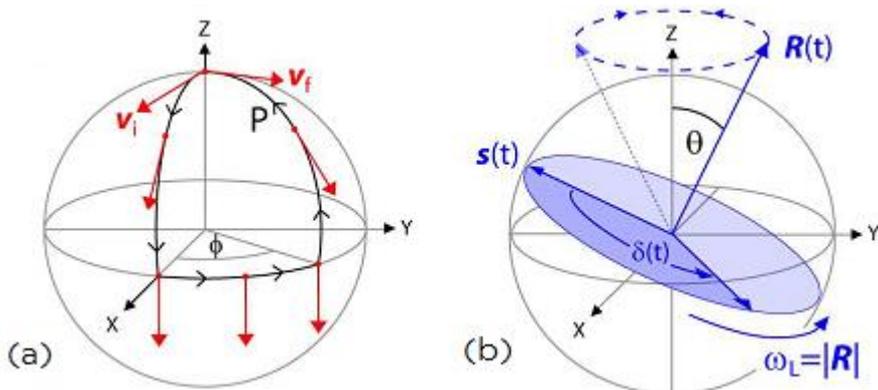


Fig. 2. (a) Transporte paralelo sobre la esfera de Bloch; (b) Dinámica de un vector $\mathbf{S}(t)$ precediendo alrededor de $\mathbf{R}(t)$ rotado un ángulo ϑ respecto del eje z .

consideramos el vector \mathbf{v}_i en el polo Norte de la superficie de la esfera de Bloch (Fig. 2) y decidimos transportarlo de manera “adiabática” (significa que el vector siempre apunta al Sur) por el camino P , el estado final que se obtiene \mathbf{v}_f , está rotado un ángulo φ respecto al estado inicial (equivalente al ángulo sólido que subtiende P). Este ángulo sólo depende de la geometría del camino P , y no

depende de la forma en que se haya realizado. Por lo tanto, cualquier modificación del camino original que no modifique el ángulo sólido, no modificará P . Bajo esta suposición es que se dice que las fases geométricas son robustas contra “fallas”, y pueden ser usadas para procesar información cuántica. El ejemplo más sencillo es el caso de una partícula de espín $1/2$ en un campo magnético variable en el tiempo. El Hamiltoniano es $H = \hbar \bar{R} \cdot \bar{\sigma} / 2$ con $\bar{\sigma}$ las matrices de Pauli y $\mathbf{R}(t)$ el vector posición en la esfera de Bloch. La dinámica del qubit puede visualizarse asumiendo que el estado $\mathbf{s}(t)$ evoluciona precediendo alrededor de $\mathbf{R}(t)$, adquiriendo una fase dinámica $\delta(t)$. Cuando $\mathbf{R}(t)$ cambia adiabáticamente en el tiempo, el qubit adquiere además una fase geométrica (conocida como fase de Berry) surgida del recorrido de $\mathbf{R}(t)$ en el espacio de parámetros del Hamiltoniano.

La principal importancia de las fases geométricas reside en su capacidad de codificar información del sistema y su potencial utilización en el contexto de computación cuántica. Sin embargo, es importante destacar que todas las implementaciones prácticas de este tipo de experimentos se realiza en presencia de un entorno, y por lo tanto, de *decoherencia* [5,6]. La generalización de esta fase a una evolución no unitaria fue realizada en [7] y se define:

$$\phi_G = \arg \left\{ \sum_k \sqrt{\varepsilon_k(0)\varepsilon_k(\tau)} \langle \Psi_k(0) | \Psi_k(\tau) \rangle \times e^{-\int_0^\tau dt \langle \Psi_k | \frac{\partial}{\partial t} | \Psi_k \rangle} \right\},$$

donde $\varepsilon_k(t)$ son los autovalores y $|\Psi_k(t)\rangle$ los autovectores de la matriz densidad reducida (obtenida a partir de la traza de los grados de libertad del entorno). En esta definición τ es el tiempo que tarda el sistema en completar un ciclo de evolución unitaria.

Si consideramos la presencia de un entorno, es cierto que la evolución del sistema deja de ser unitaria, y el sistema probablemente no tenga evoluciones cíclicas (dependerá de cuán fuerte sea la interacción con el entorno). Sin embargo, asumimos interacciones débiles de modo de pensar evoluciones cuasi cíclicas, es decir $\tau \approx 2\pi/\Omega$, con Ω la frecuencia natural del sistema. Se sabe que la fase geométrica sólo puede ser observada en experimentos que se lleven a cabo en una escala temporal lenta, de manera de asumir una evolución adiabática. Asimismo, el experimento debe ser lo suficientemente rápido para evitar que la decoherencia destruya las interferencias cuánticas. Es decir, existe un tiempo de “decoherencia” t_D en el cual las fases geométricas literalmente desaparecen debido al entorno. En los diferentes trabajos [8-17], estudié cómo se ven afectadas las fases geométricas en presencia de decoherencia y bajo qué condiciones podrían ser medidas.

Dinámica de un qubit superconductor en presencia de ruido externo

Los circuitos superconductores resultan excelentes candidatos para manipular la información cuántica. Experimentos con superconductores han demostrado que éstos dispositivos contienen tiempos de coherencia cuántica suficientemente largos para procesar y comunicar la información de manera cuántica [18,19]. Recientemente, la fase geométrica ha sido observada en un sistema superconductor [20]. Si se consideran los dos niveles de energía más bajos de una juntura Josephson, se puede asumir que se trabaja con un sistema de dos niveles (o "qubit"). Este sistema de dos niveles puede ser manipulado con corrientes de baja frecuencia o del rango de las microondas. Para este modelo, el Hamiltoniano se puede escribir como:

$$H = \frac{\hbar}{2} \omega_a \sigma_z + \hbar \Omega_R \cos(\omega t + \varphi_R) \sigma_x,$$

donde Ω_R es la amplitud de interacción dipolar entre el qubit y el campo de microondas de frecuencia ω y fase φ_R . Este Hamiltoniano puede ser transformado a un marco de referencia rotante de frecuencia ω , para obtener un Hamiltoniano efectivo que nos permita encontrar la dinámica del sistema:

$$H_{\text{eff}} = \frac{\hbar}{2} (\Delta \sigma_z + \Omega_x \sigma_x + \Omega_y \sigma_y),$$

con $\Omega_x = \Omega_R \cos(\varphi_R)$ y $\Omega_y = \Omega_R \sin(\varphi_R)$. Este último Hamiltoniano es muy similar al ejemplo ya mencionado de un qubit en un campo magnético variable, con $\vec{R} = (\Omega_x, \Omega_y, \Delta)$ y $\Delta = \omega_a - \omega$; y nos permite avanzar en el cálculo de la fase geométrica. En una situación experimental como la relatada en [20], Δ se mantiene fija y uno puede controlar el flujo de campo a través de Ω_R .

Llamativamente, los dispositivos y estructuras físicas que convierten a los superconductores útiles para medir y manipular, son también los responsables de acoplar el qubit a grados de libertad electromagnéticos que pueden convertirse en generadores de pérdida de coherencia cuántica a través de ruido y disipación. Por eso, resulta tan importante estudiar los mecanismos de decoherencia y ruido que estas estructuras pueden presentar al ser manipuladas, por ejemplo en experimentos donde se observa la fase geométrica. Generalmente, el ruido que se introduce al manipular las estructuras es modelado por fluctuaciones del campo magnético en diferentes direcciones. Aquí llamaremos ruido longitudinal a aquel aplicado en la misma dirección del qubit, y ruido transversal, en direcciones perpendiculares al mismo. Estas fluctuaciones del campo, a su vez, pueden ser modeladas por distintos tipos de ruido, por ejemplo Gaussianas o no-Gaussianas en base a la fenomenología del problema [21]. Para conocer la dinámica de un sistema cuántico que evoluciona de manera no-unitaria, debido a procesos de decoherencia y disipación, es

necesario plantear el Hamiltoniano total del sistema (sistema cuántico H_q , interacción del sistema y entorno H_{int} ; y entorno H_{ent}):

$$\begin{aligned} H_{\text{Total}} &= H_q + H_{\text{int}} + H_{\mathcal{E}}, \quad \text{con} \\ H_q &= \frac{1}{2} (\Omega \sigma_x + \Delta \sigma_z) \\ H_{\text{int}} &= \frac{1}{2} \left(\delta \hat{\omega}_1 \sigma_x + \delta \hat{\omega}_0 \sigma_z \right). \end{aligned}$$

De esta manera, el Hamiltoniano H_q resulta similar al Hamiltoniano efectivo definido con anterioridad (con $\varphi_R = 0$ por simplicidad). Asimismo, el Hamiltoniano de interacción considera ruidos en direcciones \mathbf{z} y \mathbf{x} , en función de parámetros de ruido $\delta \hat{\omega}_0$ y $\delta \hat{\omega}_1$ que servirán para modelar los diferentes ruidos considerados. Con estas suposiciones como punto de partida, y en el caso de acoplamiento débil entre el entorno y el sistema, uno puede obtener una ecuación maestra para la matriz densidad reducida de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -i [H_q, \rho] - D_{xx}(t) [\sigma_x, [\sigma_x, \rho]] - f_{xy}(t) [\sigma_x, [\sigma_y, \rho]] - f_{xz}(t) [\sigma_x, [\sigma_z, \rho]] \\ &\quad - f_{zx}(t) [\sigma_z, [\sigma_x, \rho]] - f_{zy}(t) [\sigma_z, [\sigma_y, \rho]] - D_{zz}(t) [\sigma_z, [\sigma_z, \rho]], \end{aligned}$$

donde $D_{\mathbf{a}\mathbf{b}}(t)$ y $f_{\mathbf{a}\mathbf{b}}(t)$ son coeficientes de decoherencia normal y anómalos respectivamente ($\mathbf{a}, \mathbf{b} = \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$) [10].

La idea es utilizar diferentes funciones para definir los ruidos y ver qué tan nocivos son para el sistema cuántico. Definiendo los ruidos, se pueden calcular los coeficientes de la ecuación maestra y conocer la evolución temporal de la matriz reducida del sistema (o qubit), ya que $\rho = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$. Con esta cantidad conocida, podemos reconstruir la dinámica del qubit por ejemplo, visualizando como se ve afectado el vector $\mathbf{R}(t)$ en presencia de distintas fuentes de decoherencia, usualmente modeladas por las correlaciones de ruido $\langle \delta \hat{\omega}_i(t_1) \delta \hat{\omega}_j(t_2) \rangle$ para distintos modelos. Cualitativamente, se puede entender al efecto de la decoherencia como las fluctuaciones del vector $\mathbf{R}(t)$ inducidas por el ruido presente.

En la Fig. 3 se muestra la evolución del vector $\mathbf{R}(t)$ en la esfera de Bloch. La línea negra representa la evolución unitaria del qubit, es decir que el qubit realiza una trayectoria cerrada sobre la superficie de la esfera en ausencia de ruido. La línea azul punteada y el trazo rojo corresponden a diferentes ruidos gaussianos, modelados a través de un parámetro α_0 para la dirección longitudinal y α_1 para la trasversal. La línea azul presenta un comportamiento

muy similar al caso unitario, mientras que el parámetro utilizado para modelar la línea roja, resultó ser más decoherente, ya que la trayectoria se apartó considerablemente de la trayectoria cerrada en la evolución de un período. El vector $\mathbf{R}(t)$ ya no se encuentra sobre la superficie de la esfera porque el sistema pierde pureza. Finalmente, es fácil ver que la trayectoria naranja presenta un comportamiento cualitativamente distinto. Esto se debe a que el ruido que se modela es un ruido cuyas correlaciones son cortas temporalmente, tipo funciones Delta. En este caso, el vector $\mathbf{R}(t)$ decae al centro de la esfera, perdiendo pureza mucho más rápido que los modelos gaussianos analizados. En todos los casos, el ruido se graficó con igual intensidad en ambas direcciones \mathbf{z} y \mathbf{x} .

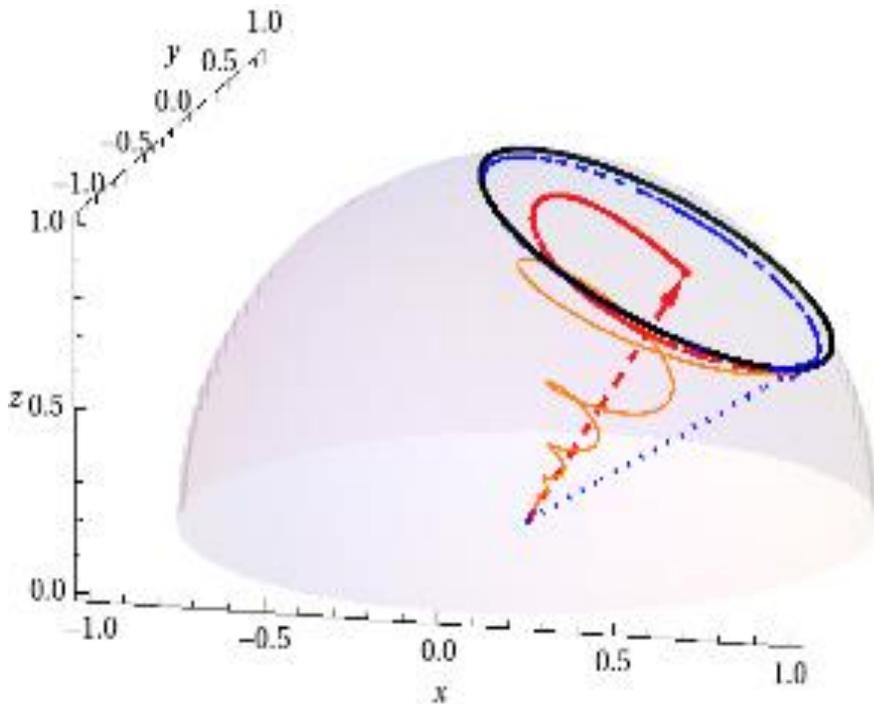


Fig. 3. Evolución del sistema ilustrada a partir del vector $\mathbf{R}(t)$ en la esfera de Bloch. A partir de la resolución de la ecuación maestra, es posible ver la pérdida de coherencia que sufre el sistema. La línea negra es una evolución cerrada y unitaria en la superficie de la esfera. La trayectoria rojo (y azul) corresponden a modelos de ruido gaussianos en ambas direcciones. La trayectoria naranja, que alcanza el centro de la esfera es la que corresponde a un ruido correlacionado con una función tipo delta.

Correcciones a la fase geométrica en presencia de ruido de baja frecuencia

Los experimentos para observar la fase geométrica (o de Berry) deben ser realizados en tiempos suficientemente lentos para desprestigiar efectos no adiabáticos, pero suficientemente rápidos para evitar los efectos destructivos de la decoherencia. En [18], los autores afirmaron haber observado esta fase en presencia de ruido de alta frecuencia, proponiendo que esta “robustez” sea explotada en la realización de compuertas lógicas en computación cuántica. A partir del modelo presentado en este manuscrito, se puede justificar dicho experimento, poniendo en manifiesto que la fase geométrica se ve menos afectada por ruidos de alta frecuencia que aquellos de baja frecuencia.

A partir de la solución de la ecuación maestra, se puede conocer la dinámica del sistema y cuantificar los efectos del ruido sobre la coherencia cuántica del sistema. Asimismo, se puede calcular la fase geométrica de acuerdo a su definición. Con esta fórmula podemos estimar cómo se modifica la fase geométrica en presencia de entornos respecto de la fase geométrica unitaria ϕ_U . En la Fig. 4, se muestra cómo se modifica la fase geométrica en presencia de distintos ruidos: longitudinales y transversales. Como ejemplo, se considera un ruido gaussiano parametrizado con α_0 y α_1 . Se presenta el cociente entre la fase geométrica acumulada durante la evolución no unitaria y la fase geométrica adquirida en un ciclo de evolución τ unitaria, en función del acoplamiento entre el sistema y el ruido γ_i . Si el qubit está acoplado a través de γ_0 , su acoplamiento es longitudinal ($\gamma_1 = 0$, representado por círculos negros para baja frecuencia y círculos negros vacíos para alta frecuencia), ya que está acoplado al eje z. En cambio, si su acoplamiento está modelado a través de γ_1 , ($\gamma_0 = 0$, representado por cuadrados vacíos azules para baja frecuencia y cuadrados azules para alta frecuencia), su acoplamiento es en la dirección del eje x y lo definimos transversal al qubit.

La corrección a la fase geométrica resulta imperceptible cuando el ruido es transversal (cuadrados en la Figura), tanto para ruidos de alta frecuencia o baja frecuencia. En cambio, el resultado es bastante distinto si el ruido presente es longitudinal, o sea $\gamma_0 \neq 0$, y la corrección a la fase unitaria es

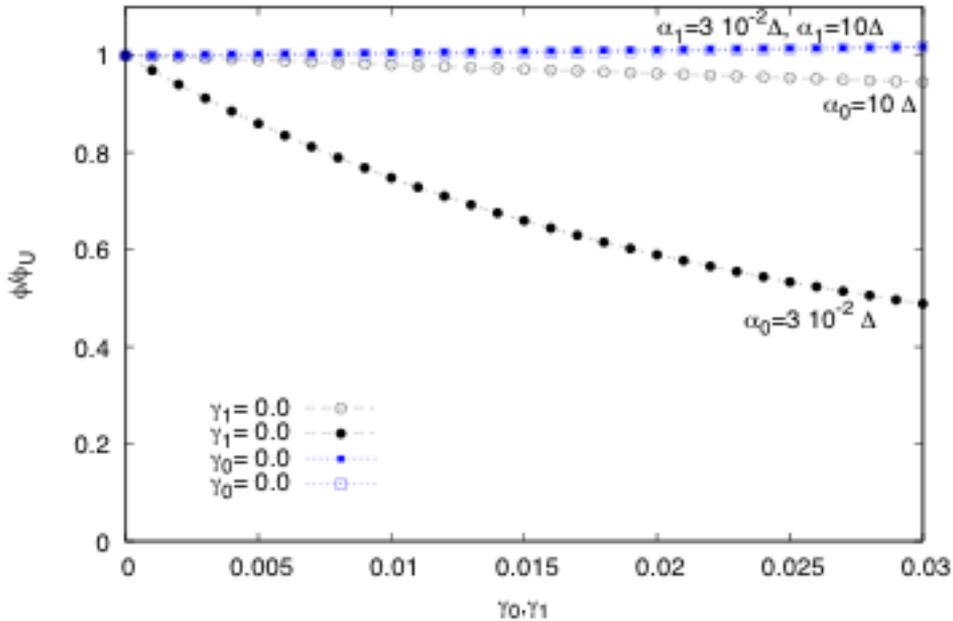


Fig. 4. Cociente entre la fase geométrica calculada y la fase geométrica unitaria en función de la constante de acoplamiento para ruido longitudinal y transversal.

mayor cuanto mayor sea el acoplamiento al entorno. Ahí se puede observar, que el ruido de baja frecuencia induce una corrección en la fase unitaria mucho mayor que aquel de alta frecuencia, es decir el valor de la fase acumulada difiere considerablemente de su valor unitario. Este ruido corresponde a valores similares de los parámetros de la curva roja de la Fig, 3, mientras que el ruido de alta frecuencia corresponde a valores similares de la curva azul de dicha Figura.

Conclusiones

El estudio de las fases geométricas en sistemas cuánticos con superconductores resulta de gran interés en la actualidad debido a sus potenciales aplicaciones en información cuántica. En este artículo, se realizó una revisión del concepto de fase geométrica y su extensión a sistemas cuánticos abiertos, poniendo énfasis en los aportes recientes que he realizado en el área. En particular, se mostró cómo es posible modelar el ruido cuando se manipula un qubit superconductor para medir su fase geométrica. Los resultados presentados están de acuerdo con la observación experimental de dicha fase. La comparación entre la teoría y el experimento verifican la correcta comprensión de la física detrás de un sistema cuántico de dos niveles. La completa comprensión de fenómenos de decoherencia y disipación permitirá desarrollar dispositivos experimentales en los cuales se logren suprimir sus efectos destructivos, y lograr el transporte de información cuántica a prueba de fallas.

Agradecimientos

Agradezco a los miembros de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales por la distinción. Asimismo, agradezco el financiamiento de ANPCyT (PICT2011-1009 y PICT2014-2198), CONICET PIP0668 and UBACyT 2014-2017. El artículo se encuentra basado principalmente en las referencias [15,21]; agradezco a mi colaborador Fernando C. Lombardo, co-autor de estos trabajos.

Referencias

- [1] S. Pancharatnam, *Proc. Indian Acad. Sci. A* **44**, 247 (1956).
- [2] M.V. Berry, *Proc. Roy. Soc. A* **329**, 45 (1984).
- [3] G. Falci, R. Fazio, G.M. Palma, J. Siewert & V. Vedral, *Nature* **407**, 355 (2000).
- [4] J.A. Jones, V. Vedral, A. Eckert & G. Castagnoli, *Nature* **403**, 869 (2000).
- [5] F.C. Lombardo & P.I. Villar, *Phys. Lett. A* **336**, 16 (2005).
- [6] F.C. Lombardo & P.I. Villar, *Phys. Lett. A* **371**, 190 (2007).
- [7] D. Tong, E. Sjöqvist, L. Kwek & C.H. Oh, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 080405 (2004); **95**, 249902 (2005).
- [8] F.C. Lombardo & P.I. Villar, *Phys. Rev. A* **74**, 042311 (2006).
- [9] F.C. Lombardo & P.I. Villar, *Int. J. Quantum Inf.* **6**, 707(2008).
- [10] P.I. Villar, *Phys. Lett. A* **373**, 206 (2009).
- [11] F.C. Lombardo & P.I. Villar, *Phys. Rev. A* **87**, 032338 (2013).
- [12] F.M. Cucchietti, J.-F. Zhang, F.C. Lombardo, P.I. Villar & R. Laflamme, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 240406 (2010).
- [13] F.C. Lombardo & P.I. Villar, *Phys. Rev. A* **81**, 022115 (2010).
- [14] P.I. Villar & F.C. Lombardo, *Phys. Rev. A* **83**, 052121 (2011).
- [15] F.C. Lombardo & P.I. Villar, *Phys. Rev. A* **89**, 012110 (2014).
- [16] F.C. Lombardo & P.I. Villar, *Phys. Rev. A* **91**, 042111 (2015).
- [17] F.C. Lombardo & P.I. Villar, *Eur. Phys. Lett.* **118**, 50003 (2017).
- [18] M.-S. Choi, *J. Phys.: Condens. Matter* **15**, 7823 (2003).
- [19] J.M. Martinis, S. Nam, J. Aumentado, K.M. Lang, & C. Urbina, *Phys. Rev. B* **67**, 094510 (2003).
- [20] P.J. Leek, J.M. Fink, A. Blais, R. Bianchetti, M. Goppl, J.M. Gambetta, D.I. Schuster, L. Frunzio, R.J. Schoelkopf & A. Wallraff, *Science* **318**, 1889 (2007).
- [21] P.I. Villar & F.C. Lombardo, *Phys. Lett. A* **379**, 246 (2015).

Manuscrito recibido el 30 de marzo de 2018.

Aceptado el 20 de abril de 2018.