Anales Acad. Nac. de Cs. Ex., Fís. y Nat., tomo 59 (2017): 131-139.

SOBRE LA CLASIFICACIÓN DE ÁLGEBRAS

Jorge Lauret

FaMAF-CIEM, Universidad Nacional de Córdoba, Medina Allende s/n, 5000 Córdoba.
E-mail: lauret@mate.uncor.edu

Resumen

El principal objetivo de este artículo es plantear algunas preguntas provenientes de la Teoría de Invariantes que uno podría o debería hacerse cuando intenta clasificar álgebras de cualquier tipo. En realidad, dichas preguntas surgen naturalmente cuando se considera cualquier problema donde los objetos a estudiar o clasificar están parametrizados por un subconjunto algebraico de un espacio vectorial y la equivalencia entre ellos está definida por la acción lineal de un grupo reductivo. A lo largo de todo el artículo se usará como ejemplo ilustrativo el caso de las álgebras de Lie.

Palabras clave: Álgebras, Degeneraciones, Rigidez, Aplicación momento.

Abstract

On the classification of algebras. The main purpose of the present expository paper is to establish some natural questions from Invariant Theory one may or should consider when is trying to classify any class of algebras. Actually, such questions arise naturally in any problem where the objects to study or to classify are parameterized by an algebraic subset of a vector space and the equivalence between them is given by the action of a reductive group. Throughout the paper, we shall use as an illustrative example the case of Lie algebras.

Key words: Algebras, Degenerations, Rigidity, Moment map.

1. Introducción

La primera estructura algebraica que aprende toda persona que aprende al menos una es generalmente la de espacio vectorial real. Se entera uno rápidamente que hay un único espacio vectorial en cada dimensión salvo isomorfismo, y que esto sigue siendo cierto sobre cualquier cuerpo, no sólo sobre $\mathbf{R}$, el cuerpo de los números reales. El producto cruz en $\mathbf{R}^3$ es la primera forma de multiplicar dos vectores con resultado otro vector que estudiamos, nos enseñan más tarde a multiplicar matrices y polinomios, y ha de pasar mucho tiempo para que uno se encuentre con otra forma, es decir con otra álgebra.

Sea k un cuerpo. Un *álgebra* sobre k es un k-espacio vectorial A provisto de un *producto* p, que es ni más ni menos que una función bilineal

$$p : A\times A \to A.$$

Fijado un número natural n, ¿cuántas álgebras de dimensión n salvo isomorfismo hay? Es claro que podemos fijar un espacio vectorial n-dimensional A y considerar los distintos productos en A. El espacio $\mathcal{P}$ de todos los productos sobre A es un espacio vectorial de dimensión n^3, y dos productos p y q determinan álgebras isomorfas si y sólo si existe un operador invertible g de A tal que

$$gp(a,b) = q(ga,gb), \qquad \text{para todo a,b en A.}$$

En otras palabras, si GL(A) denota el grupo de todos los operadores invertibles de A entonces las órbitas de GL(A) en $\mathcal{P}$ respecto de la acción

$$g.p := gp(g^{-1}\cdot, g^{-1}\cdot),$$
$$\text{para todo g en GL(A) y p en } \mathcal{P},$$

son precisamente las clases de isomorfismo. Luego el cociente

$$\mathcal{P}/\mathrm{GL(A)}$$

parametriza el conjunto de clases de isomorfismos de álgebras n-dimensionales sobre k. Denotemos por [p] al elemento de $\mathcal{P}$/GL(A), clase de un producto p en $\mathcal{P}$. Por una simple cuestión de dimensión ya se puede intuir que $\mathcal{P}$/GL(A) no será finito si $n \geq 2$, recordemos que la dimensión de $\mathcal{P}$ es n^3 y la de GL(A) es n^2. Se sabe por ejemplo que hay una cantidad no numerable de álgebras asociativas para n = 4, como así también de álgebras asociativas y conmutativas de dimensión 6.

De aquí en adelante, sin definirnos por ninguna en particular, consideraremos álgebras sobre k de una cierta clase, es decir un subconjunto $\mathcal{X}$ de $\mathcal{P}$ de productos que satisfacen una lista explícita de propiedades adicionales. Notemos que generalmente, las condiciones que se le piden a un álgebra están definidas por la anulación de funciones polinomiales en $\mathcal{P}$, es decir funciones que dependen polinomialmente de las coordenadas de p en cualquier base. En consecuencia, las álgebras que las cumplen forman un subconjunto algebraico $\mathcal{X}$ de $\mathcal{P}$. Al conjunto $\mathcal{X}$ lo llamaremos entonces la *variedad de álgebras asociativas, conmutativas, de Lie, de Jordan, alternantes, simétricas, antisimétricas,* etc., dependiendo de la clase de álgebras que nos interese estudiar, de las condiciones adicionales que pidamos. A veces, nuestras condiciones ni siquiera definen álgebras con un "nombre", pero no es algo que debería preocuparnos demasiado.

Ejemplo. Un *álgebra de Lie* es un álgebra (A,p) que para todo a, b, c en A satisface

$$p(a,a) = 0 \quad \text{y} \quad p(a,p(b,c)) = p(p(a,b),c) + p(b,p(a,c)),$$

es decir, p es *antisimétrica* y multiplicar a izquierda por cualquier elemento es una derivación del álgebra. Ésta última se denomina la *condición de Jacobi*. El subconjunto de $\mathcal{P}$ de productos que satisfacen dichas condiciones será denotado por L, y se llama la *variedad de álgebras de Lie* de dimensión n.

Notemos que $\mathcal{X}$ es siempre GL(A)-invariante y que el cociente

$$\mathcal{X}/\mathrm{GL(A)}$$

parametriza el conjunto de clases de isomorfismo de álgebras de esta clase. Clasificar las álgebras de tipo $\mathcal{X}$ significará entones describir lo mejor que se pueda a $\mathcal{X}$ / GL(A), conjunto que será nuestro principal interés a lo largo de este artículo. Una observación muy elemental pero que quizás valga la pena hacer, es que el hecho de que dos álgebras p y q en $\mathcal{X}$ sean isomorfas es independiente de $\mathcal{X}$, en el sentido de que lo serán si y sólo si lo son como elementos de $\mathcal{P}$.

Asumamos de ahora en más que k es **R** o el cuerpo de números complejos **C**.

Pregunta ¿Es $\mathcal{X}$/GL(A) finito?

Esta sencilla pregunta es usualmente la que más avances en la clasificación genera, pues el incentivo de encontrar una "curva" en $\mathcal{X}$/GL(A), es decir una familia continua $[p_t]$ tal que p_t es isomorfa a p_s si y sólo si t = s, nos lleva a construir ejemplos alejados de lo estándar y también a descubrir invariantes.

¿Qué es un invariante? Quizás la forma más simple de definirlo sea como una función en $\mathcal{X}$, o sólo en un subconjunto de $\mathcal{X}$, a valores en cualquier conjunto, que tiene la propiedad de ser GL(A)-invariante, es decir vale lo mismo en álgebras isomorfas. Por ejemplo, si fortuitamente algún invariante en una curva p_t de álgebras reales toma el valor t^3, obtendremos sin más que es "realmente" una curva de álgebras para t en **R**, es decir $[p_t]$ es una curva en $\mathcal{X}$/GL(A).

Ejemplo. Todo aquel que haya tomado un curso de Álgebra Lineal avanzada y haya aprendido a clasificar matrices salvo conjugación, ha sido testigo de la potencia de los invariantes. Primero aparecen el determinante y la traza, luego los autovalores, el polinomio minimal, y finalmente el problema queda completamente resuelto por las formas canónicas, la racional y la de Jordan. ¿Quiénes son los "autovalores" de un álgebra?

Si $\mathcal{X}$/GL(A) no es finito, no podemos esperar entonces que la clasificación dé como resultado una tabla, una lista finita de familias discretas y ejemplos aislados o excepcionales. Como $\mathcal{X}$ es una variedad algebraica y GL(A) es un grupo reductivo, tendrá que haber familias continuas.

Pregunta ¿Cuál es la "dimensión" de $\mathcal{X}$/GL(A)?, es decir, ¿cuántos parámetros necesitamos para describir las familias continuas en $\mathcal{X}$/GL(A)?

Notemos que hasta ahora $\mathcal{X}$/GL(A) es para nosotros simplemente un conjunto, lo cual nos ha obligado a poner comillas al referirnos a algunos conceptos. Resulta evidente que para proseguir, deberíamos intentar elevar este conjunto de categoría.

Pregunta ¿Existe alguna estructura matemática natural en $\mathcal{X}$/GL(A)?

2. Topología y cocientes

Sin costo alguno, la primera estructura que se puede considerar en $\mathcal{X}$/GL(A) es topológica, y consiste en considerar la topología cociente de la topología que tenemos en $\mathcal{X}$ al restringir la canónica de $\mathcal{P}$, es decir la métrica o euclídea. Se puede por supuesto también considerar la topología Zariski en $\mathcal{X}$, aunque el hecho de que GL(A) es un grupo algebraico reductivo volverá a varias de las nociones equivalentes en una u otra topología, como lo son por ejemplo la clausura de las órbitas y el hecho de que sean abiertas.

¿Qué clase de espacio topológico es $\mathcal{X}$/GL(A)? Veamos por qué la respuesta a esta pregunta es muy desalentadora. Notemos que la órbita del álgebra correspondiente al elemento 0 de $\mathcal{P}$, es decir con producto completamente nulo (nos referiremos a dicha álgebra como *trivial*), consiste de ese único punto, y que 0 siempre pertenece a $\mathcal{X}$ pues $\mathcal{X}$ es cerrado y GL(A)-invariante. En efecto, si para un t no nulo en k denotamos por g_t al operador escalar t^{-1}Id de A, entonces el producto

$$(g_t.p)(a,b) = tp(a,b) \quad \text{para todo a,b en A,}$$

converge a 0 cuando t tiende a 0, lo que muestra que el 0 está en la clausura de toda GL(A)-órbita. La terrible consecuencia de este hecho tan simple es que, como los abiertos en $\mathcal{X}$/GL(A) son las proyecciones de los abiertos GL(A)-invariantes de $\mathcal{X}$, por la definición misma de topología cociente, el único entorno de [0] es el espacio total $\mathcal{X}$/GL(A), y por lo tanto la clausura de este conjunto unitario es todo $\mathcal{X}$/GL(A). Más en general, si q está en la frontera de GL(A).p, entonces resulta imposible separar a [q] de [p] por un abierto de [q]. En resumen, el espacio $\mathcal{X}$/GL(A) está bastante lejos de ser T_1.

Debemos recalcar que las órbitas sin embargo son siempre espacios muy lindos, ya que para toda álgebra p se tiene la siguiente biyección:

$$\mathrm{GL(A).p} \leftrightarrow \mathrm{GL(A)} / \mathrm{Aut(p)},$$

donde

$$\mathrm{Aut(p)} = \{\text{g en GL(A)} : \text{g.p} = \text{p}\}$$

es el grupo de automorfismos de p, y como Aut(p) es un subgrupo cerrado de GL(A) (notar que siempre es algebraico también), entonces el cociente GL(A)/Aut(p) y en consecuencia la órbita, poseen en forma gratuita una estructura de variedad diferenciable homogénea. Notar que el álgebra de Lie de Aut(p) es el espacio de derivaciones de p definido por

$$\mathrm{Der(p)} = \{\text{X en gl(A)} : \text{Xp(a,b)} = \text{p(Xa,b)} + \text{p(a,Xb)}\}, \quad \text{para todo a,b en A,}$$

donde gl(A) = {X : A $\rightarrow$ A : X es k-lineal}. La dimensión de las órbitas está dada entonces por

$$\dim \mathrm{GL(A).p} = n^2 - \dim \mathrm{Der(p)}.$$

El precio a pagar por un cociente no tan feo topológicamente, o sea al menos T_1, es entonces el tener que considerar sólo aquellos productos cuyas órbitas sean cerradas en $\mathcal{P}$. Pero hemos visto más arriba que sólo el álgebra trivial satisface dicha condición, lo que nos obliga a achicar un poco al grupo que actúa. No es difícil convencerse de que entender el conjunto $\mathcal{X}$/ SL(A), donde SL(A) es el subgrupo de GL(A) de operadores de determinante uno, sería esencialmente lo mismo en lo que concierne a la clasificación. Lo único que estaríamos obviando de la acción que determina el isomorfismo de álgebras es la multiplicación de un producto por un escalar no nulo.

Es sabido que la topología cociente en $\mathcal{X}$/SL(A) se puede definir de una forma más elegante, como la única que satisface la siguiente propiedad universal en la categoría de espacios topológicos: para todo espacio topológico Y y toda función continua f : $\mathcal{X} \rightarrow$ Y que es constante en SL(A)-órbitas existe una única función continua g : $\mathcal{X}$/ SL(A) $\rightarrow$ Y tal que $g \circ \pi = f$, donde $\pi(p) = [p]$ para todo p en $\mathcal{X}$.

Pero $\mathcal{X}$ es varias cosas además de un espacio topológico, por ejemplo, una variedad algebraica. Luego podemos definir el cociente mediante la misma propiedad universal pero en la categoría de variedades algebraicas. Dicho cociente universal constará entonces de una variedad algebraica que denotaremos por

$$\mathcal{X} \,/\!/\, \mathrm{SL(A)}$$

y una proyección $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} /\!/ \mathrm{SL(A)}$, morfismo de variedades algebraicas, llamado el *cociente categórico*. La unicidad de dicho objeto estará garantizada por su misma definición "universal", como siempre. Fue probado por Mumford en [12], en un contexto mucho más general que éste por supuesto, que $\mathcal{X} /\!/ \mathrm{SL(A)}$ resulta ser precisamente la variedad algebraica correspondiente al anillo $k[\mathcal{X}]^{SL(A)}$ de k-polinomios SL(A)-invariantes en $\mathcal{X}$. En particular, si SL(A).p es distinta a SL(A).q y ambas son cerradas entonces existe un polinomio SL(A)-invariante f tal que $f(p) \neq f(q)$. Este importante hecho es el puente entre la Teoría

Geométrica de Invariantes, abocada al estudio de las acciones y sus cocientes, y la Teoría Algebraica de Invariantes, cuyo principal interés es describir el álgebra de polinomios invariantes respecto de alguna acción, por ejemplo calculando algún conjunto finito de generadores y sus relaciones (ver [16] para una amable introducción a la Teoría de Invariantes, y también [14] y [2], donde se adaptan y prueban varios resultados para el caso real).

El cociente $\mathcal{X}//\mathrm{SL(A)}$, sin embargo, puede ser bien entendido obviando toda esta maquinaria, ya que es también el cociente en la categoría más elemental de espacios topológicos T_1, y como conjunto, consiste (salvo múltiplo escalar) de las clases de isomorfismo de álgebras en X con sus SL(A)-órbitas cerradas. De cualquier forma, es claro que las álgebras de cualquier clase que tengan su SL(A)-órbita cerrada son distinguidas, lo cual se debería traslucir algebraicamente.

En el caso $\mathcal{X} = \mathcal{P}$, tenemos que $\mathcal{P}$ es también un espacio vectorial, una variedad diferenciable, una variedad Riemanniana, una variedad compleja si $k = \mathbf{C}$, entre otras varias cosas, y sería al menos divertido intentar descubrir qué da el cociente universal de $\mathcal{P}$ por GL(A) en cada una de estas categorías.

Pregunta ¿Cuáles son las álgebras en $\mathcal{X}$ que tienen su SL(A)-órbita cerrada? ¿Se las puede describir algebraicamente? ¿Qué clase de variedad algebraica es $\mathcal{X}//\mathrm{SL(A)}$?

Ejemplo. Un álgebra de Lie se dice *simple* si es no trivial y no posee ideales propios no nulos. Se sabe que si (A,p) es un álgebra de Lie entonces la órbita SL(A).p es cerrada si y sólo si (A,p) es semisimple, es decir suma directa de simples (ver [9] por ejemplo) Más aún, toda otra álgebra de Lie se sigue degenerando a 0 mediante la acción de SL(A), es decir el 0 está en la clausura de la SL(A)-órbita de toda álgebra de Lie no semisimple.

3. La variedad algebraica $\mathcal{X}$

Resulta a veces muy útil y relajante olvidarse del cociente y quedarse arriba, es decir estudiar a $\mathcal{X}$ como variedad algebraica, sin preocuparnos por el hecho de que cada GL(A)-órbita es en realidad una sola álgebra.

Pregunta ¿Es $\mathcal{X}$ irreducible?

Es fácil ver que cada componente irreducible de $\mathcal{X}$ es GL(A)-invariante, así que si $\mathcal{X}$ no es irreducible, al menos tener buenas cotas inferiores y superiores de la cantidad de componentes irreducibles nos brindará sin duda una buena idea del grado de dificultad que tendrá el estudio de $\mathcal{X}/\mathrm{GL(A)}$.

Pregunta ¿Cuál es la dimensión de $\mathcal{X}$?

También este número nos ayudará a estimar la "dimensión" del cociente mencionado en Sección 1.

Ejemplo. Si p es un álgebra de Lie y q es un álgebra antisimétrica entonces la recta p + tq satisface la condición de Jacobi para todo t en un entorno de 0 si y sólo si q es un 2-cociclo para la cohomología de (A,p) a valores en su representación adjunta, llamada a veces Cohomología de Chevalley. Luego el espacio $Z^2(p)$ de 2-cociclos es precisamente el espacio tangente de la variedad de álgebras de Lie $\mathcal{L}$ en p (ver [4] por ejemplo). Es fácil ver que el espacio tangente en p de la órbita GL(A).p, la cual recordamos es difeomorfa a la variedad diferenciable homogénea GL(A)/Aut(p), es el espacio $B^2(p)$ de cobordes, y entonces el segundo grupo de cohomología

$$H^2(p) = Z^2(p) \,/\, B^2(p),$$

puede ser considerado en algún sentido como el "espacio tangente" del cociente $\mathcal{L}/\mathrm{GL(A)}$ en el punto [p]. Un álgebra de Lie se dice *nilpotente* si $a \rightarrow p(b,a)$ es un operador nilpotente para todo b en A. Para el caso de la variedad de álgebras de Lie nilpotentes $\mathcal{N}$, la cohomología adecuada fue definida por Vergne en [18]. En la tabla al final del artículo está resumido lo que se sabe acerca de la cantidad de componentes irreducibles de $\mathcal{L}$ y de $\mathcal{N}$.

Pregunta ¿Cuál es la cohomología que describe el espacio tangente de $\mathcal{X}$ en un álgebra p de $\mathcal{X}$?

En tal caso, las álgebras con dicha cohomología cero serán muy distinguidas, pues su GL(A)-órbita resultará abierta (ver Sección 5). Todo esto ha sido estudiado en gran generalidad por Gerstenhaber en [3].

4. Degeneraciones

Se dice que un álgebra (A,p) se *degenera* en otra (A,q), y se denota por

$$p \rightarrow q,$$

si q pertenece a la frontera de la órbita GL(A).p, es decir, si q pertenece a la clausura de GL(A).p pero no es isomorfa a p. Notar que la clausura de toda órbita es GL(A)-invariante, es decir una unión de órbitas, así que en tal caso toda la órbita GL(A).q tendrá que estar contenida en la frontera de GL(A).p. En cierto sentido, como todas las álgebras se degeneran en la trivial, si $p \to q$ entonces q está "más cerca" de la trivial que p. Por ejemplo, como la dimensión de la órbita de q es menor estricta a la de p, obtenemos que

$$\dim \mathrm{Der}(p) < \dim \mathrm{Der}(q).$$

Esto determina una obstrucción para las degeneraciones, y es muy útil tener otras, pues el conjunto de degeneraciones de un álgebra p, así como el de las álgebras que se degeneran en p, son invariantes de p.

Sea $\mathcal{X}$ una clase de álgebras. La noción de degeneración define un orden parcial en el conjunto de GL(A)-órbitas de $\mathcal{X}$ y entonces, dada un álgebra p en $\mathcal{X}$, se puede considerar su *altura* como la longitud mínima r entre todas las cadenas de degeneraciones

$$p \to p_{r-1} \to \dots \to p_1 \to 0.$$

Notar que como $\mathcal{X}$ es cerrado, p_i está en $\mathcal{X}$ para todo i. En otras palabras, la noción de altura es independiente de $\mathcal{X}$. Las álgebras de altura 1 son especialmente interesantes, sus órbitas son muy pequeñas y en consecuencia admiten una gran cantidad de derivaciones, y son casi cerradas, pues su frontera consiste sólo del elemento 0. Las álgebras de altura máxima en $\mathcal{X}$, más misteriosas, serían aquéllas álgebras p que no se pueden obtener como el límite de una sucesión de álgebras isomorfas dos a dos en $\mathcal{X}$ y no isomorfas a p.

Pregunta ¿Cuáles son los elementos de $\mathcal{X}$ de altura 1? ¿Y los de altura máxima? ¿Qué álgebras poseen sólo una cantidad finita de degeneraciones?

Ejemplo. Otras obstrucciones conocidas para la degeneración $p \to q$ entre álgebras de Lie p y q son:

$$\dim p(A,A) \geq \dim q(A,A),$$
$$\dim z(p) \leq \dim z(q),$$
$$\dim ab(p) \leq \dim ab(q),$$

donde $z(p) = \{a \text{ en } A : p(a,A)=0\}$ y ab(p) denota la dimensión de cualquier subálgebra abeliana maximal de p. Se conoce la tabla completa de degeneraciones de álgebras de Lie complejas de dimensión ≤ 4 (ver [1]) y en el caso nilpotente hasta dimensión 6 inclusive (ver [17]). Existen exactamente dos álgebras de Lie p y q de altura 1 para $n \geq 3$ (ver [8]), las cuales se pueden definir en términos de una base $\{a_1, \dots, a_n\}$ de A por

$$p(a_1,a_2) = a_3;\ q(a_1,a_i) = a_i, \text{ para todo } i = 2, \dots, n.$$

Una pregunta que permanece abierta es si hay un álgebra de Lie nilpotente que no sea degeneración de ninguna otra álgebra de Lie.

5. Rigidez

Sea $\mathcal{X}$ una clase de álgebras. Un álgebra p en $\mathcal{X}$ se dice *rígida* (en $\mathcal{X}$) si su órbita GL(A).p es abierta en $\mathcal{X}$, es decir cualquier perturbación suficientemente pequeña de p dentro de $\mathcal{X}$ debe ser isomorfa a p. Un hecho intrigante es que hay a lo sumo una cantidad finita de álgebras rígidas en $\mathcal{X}$, pues cuando GL(A).p es abierta su clausura es una componente irreducible de la variedad algebraica $\mathcal{X}$, las cuales se sabe, son finitas. Esto hace de las álgebras rígidas una clase muy interesante para estudiar, cualquiera sea $\mathcal{X}$, sabiendo que su clasificación dará como resultado una lista finita, algo más acorde con la idea que uno siempre tuvo de "clasificar". El único inconveniente es que podrían ser demasiadas, como ocurre en el caso de álgebras de Lie (ver Tabla al final).

Pregunta ¿Es posible caracterizar a las álgebras rígidas de X algebraicamente?, es decir, ¿existen condiciones nítidas sobre la estructura algebraica de un álgebra (A,p) que sean suficientes y/o necesarias para la rigidez de p? ¿Cuántas álgebras rígidas hay en $\mathcal{X}$?

Recordar que una cota inferior de la cantidad de álgebras rígidas de $\mathcal{X}$ es también cota inferior de la cantidad de componentes irreducibles de $\mathcal{X}$.

Ejemplo. Hemos visto en Sección 3 que si el segundo grupo de cohomología de Chevalley satisface $H^2(p) = 0$, entonces p es rígida. Se deduce entonces que toda álgebra de Lie semisimple es rígida, aunque se conocen varios ejemplos también de álgebras de Lie solubles que son rígidas, e incluso algunas de éstas con la sorprendente propiedad de tener $H^2(p)$ no nulo (ver [5]). Uno de los problemas abiertos más intri-gantes del área es si existirá un álgebra de Lie nilpotente rígida.

6. Aplicación momento

La noción de aplicación momento proviene de Geometría Simpléctica, pero su definición en el caso de acciones lineales como la nuestra es tan natural, que uno no necesita verla desde ese punto de vista para entender o para aplicar los resultados obtenidos gracias a esta interacción. Referimos al lector a [12, Chapter 8] para más información, y a [15] para un recuento actualizado del uso de la aplicación momento en Teoría Geométrica de Invariantes.

Derivando la acción de GL(A) en P se obtiene un morfismo de álgebras de Lie Θ del espacio gl(A) en End(P), dado por

$$\Theta(X)p = Xp(\cdot,\cdot) - p(X\cdot,\cdot) - p(\cdot,X\cdot).$$

Notar que $\Theta(X)p = 0$ si y sólo si X es una derivación del álgebra (A,p).

Fijemos cualquier producto interno $<,>$ en el espacio vectorial A (que sea hermitiano si trabajamos sobre **C**), el cual nos definirá naturalmente productos internos en $\mathcal{P}$ y en gl(A) de la siguiente manera:

$$<p,q> = \Sigma <p(a_i,a_j),q(a_i,a_j)>,$$
$$<X,Y> = \Sigma <Xa_i,Ya_i>,$$

donde $\{a_1,\ldots,a_n\}$ es cualquier base ortonormal de A. Notemos que $\theta(X)^t = \theta(X^t)$ para todo X en gl(A) debido a la elección natural de productos internos hecha en todos los espacios. Denotemos por O(A) al subgupo de GL(A) de operadores $<,>$-ortogonales y por ant(A) y sim(A), a los subespacios de gl(A) de operadores antisimétricos y simétricos, respectivamente. Cada operador X se escribe de manera única como suma de un antisimétrico y uno simétrico, y la correspondiente descomposición en suma directa

$$gl(A) = ant(A) + sim(A)$$

que queda determinada se llama *descomposición de Cartan.*

La *aplicación momento* para la acción de GL(A) en P es la función

$$m : \mathcal{P} \to sim(A)$$

definida implícitamente por

$$<m(p),X> = <\theta(X)p,p>, \text{ para todo X en } sim(A).$$

Para cualquier subgrupo cerrado G de GL(A) tal que g^t pertenezca a G para todo g de G se puede definir la aplicación momento de la acción de G en $\mathcal{P}$, la cual coincidirá con la proyección ortogonal $m_G(p)$ de m(p) en $sim_G(A)$, la intersección de sim(A) con el álgebra de Lie de G.

El operador simétrico $m_G(p)$ detecta en algún sentido el comportamiento de la función norma $|| \ || : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ restringida a la órbita G.p en un entorno de p. En efecto, se sabe que $m_G(p) = 0$ precisamente cuando p es un *vector minimal*, es decir $||p||$ es el mínimo de $\{||g.p||: g \text{ en } G\}$. Si una órbita tiene un vector minimal entonces contiene una única K-órbita de vectores minimales, donde $K = G \cap O(A)$, el subgupo compacto maximal de G. Notar que la función norma es K-invariante, así que éste es el resultado óptimo de unicidad posible.

La interacción entre Geometría Simpléctica y Teoría de Invariantes se basa en el siguiente hecho remarcable, probado por Kempf y Ness en [6]:

la órbita G.p es cerrada si y sólo si contiene un vector minimal.

En otras palabras, el cociente categórico $\mathcal{X}//G$ definido en Sección 2 y la llamada reducción simpléctica $m_G^{-1}(0) / K$, son la misma cosa. Todos estos resultados sobre vectores minimales han sido probados en el caso real por Richardson y Slodowy en [14].

Si prestamos atención al hecho de que las órbitas cerradas son entonces las que contienen un cero de la función cuadrado de la norma de la aplicación momento, luego de normalizar, ignorar al 0 y considerar

$$F : \mathcal{P} \to \mathbf{R}, \qquad F(p) := ||m_G(p)||^2 / ||p||^4,$$

surge la siguiente pregunta natural: ¿Cuáles son los otros puntos críticos de F, es decir aquéllos con $F(p)>0$? Y en nuestro caso particular, ¿cuán especiales son las álgebras que contienen un punto crítico de F en sus órbitas? Notemos que F es invariante por escalares y entonces F es en realidad una función de cualquier esfera de $\mathcal{P}$ o del espacio proyectivo de $\mathcal{P}$, donde la acción de G heredada está bien definida. Es importante notar también que el hecho de que p sea un punto crítico depende del producto interno que hemos fijado en $\mathcal{P}$, pero no así la propiedad de que G.p contenga un punto crítico.

Kirwan [7] y Ness [13] (ver [11] para el caso real) probaron independientemente que los puntos críticos de F siguen gozando de algunas de las lindas propiedades de los vectores minimales, como son la de ser únicos en su órbita salvo la acción de K y la que sigue: p es punto crítico de F si y sólo si p es un mínimo de la función F restringida a G.p.

Para G = GL(A) (o equivalentemente SL(A)), esto nos permite considerar un nuevo cociente, denotado por

$$\mathcal{X} /// GL(A),$$

bastante más grande que el cociente categórico $\mathcal{X}//SL(A)$, que parametriza el conjunto de clases de isomorfismo de álgebras en $\mathcal{X}$ que contienen un punto crítico de F en sus órbitas.

Pregunta ¿Es posible describir las álgebras en $\mathcal{X}$ que tienen un punto crítico de F en sus órbitas de manera algebraica? ¿Qué clase de espacio topológico es $\mathcal{X}$///GL(A)? ¿En qué categoría es $\mathcal{X}$///GL(A) el cociente universal definido en la Sección 2?

Sucede algo interesante con los máximos globales de F. Si en un álgebra p de $\mathcal{X}$ se realiza el máximo de F en $\mathcal{X}$, entonces como también sabemos que p debe ser el mínimo de F restringida a GL(A). p, obtenemos que F es constante en la órbita GL(A).p. Esto implica que todos los puntos de GL(A).p son críticos, y se sigue luego de la unicidad que

$$GL(A).p = k^{*}\ O(A).p,$$

pues O(A) es el compacto maximal de GL(A). Se deduce entonces que la única degeneración posible de p es $p \to 0$, es decir, p tiene altura 1 (ver Sección 4). En otras palabras, la GL(A)-órbita de p es casi cerrada, sólo contiene al 0 en su frontera.

En el otro extremo, bastante más difíciles de detectar, se encuentran los mínimos globales de F en $\mathcal{X}$, los que definen álgebras con órbitas enormes y que deberían resultar especiales algebraicamente dentro de $\mathcal{X}$.

Pregunta ¿Cuáles son los mínimos y máximos globales de F en $\mathcal{X}$? ¿Se los puede caracterizar algebraicamente?

Ejemplo. En el caso de la variedad de álgebras de Lie $\mathcal{L}$ sobre **C**, se ha obtenido en [9] lo siguiente:

a) El mínimo global de $F : \mathcal{L} \to \mathbf{R}$ se alcanza sólo y en todas las álgebras de Lie semisimples, y es igual a 1/n. En el caso de que no haya ninguna de dimensión n, entonces es alcanzado en toda suma directa de una semisimple con un factor abeliano de dimensión 1 o 2, dependiendo de si hay una semisimple (n-1)-dimensional o no.

b) La GL(A)-órbita correspondiente a la suma directa del álgebra de Heisenberg 3-dimensional y un factor abeliano de dimensión n-3 (es decir el álgebra p definida al final de Sección 4), consiste de una única O(A)-órbita salvo múltiplo escalar y es el único lugar donde se realiza el máximo global de F, que es igual a 3.

c) El estudio de puntos críticos de $F : \mathcal{L} \to \mathbf{R}$ se reduce esencialmente a considerar puntos críticos nilpotentes, pues todo punto crítico es el producto semidirecto de un punto crítico nilpotente por un álgebra de Lie *reductiva* (i.e. semisimple módulo un ideal abeliano) de derivaciones que satisfacen varias propiedades de compatibilidad con el producto interno de la parte nilpotente.

Describimos a continuación una estratificación de $\mathcal{X}$ introducida por Kirwan en [7]. Sea Crit(F) el conjunto de puntos críticos de la función $F : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$, correspondiente a la aplicación momento $m : \mathcal{X} \to \mathrm{sim}(A)$ para la acción de GL(A) en $\mathcal{X}$. La imagen de Crit(F) por m resulta ser, salvo conjugación y múltiplos escalares, un conjunto finito. Si tal conjunto intersecado con alguna cámara de Weyl de gl(A) (por ejemplo las diagonales respecto de alguna base con autovalores ordenados de menor a mayor) está dado por

$$\{X_1, \ldots, X_r\},$$

entonces el flujo definido por -grad(F) en X determina una estratificación

$$\mathcal{X} = S_1 \cup \ldots \cup S_r \quad \text{(unión disjunta)},$$

donde cada estrato S_i está dado por

$$S_i = \{\text{p en X : el flujo -grad(F) partiendo de p converge a un q en Crit(F) con m(q) conjugado a } X_i \text{ salvo múltiplo}\}.$$

El flujo se queda en la GL(A)-órbita de su punto de partida p todo el tiempo, aunque su límite q (que pertenece a Crit(F)) podría pertenecer o no a GL(A).p. Si se queda se obtiene que [p] es un elemento de $\mathcal{X}$///GL(A), de lo contrario, queda determinada una degeneración $p \to q$. Un problema abierto es si en este último caso [p] realmente no pertenece a $\mathcal{X}$///GL(A).

Dicha estratificación tiene algunas propiedades de fronteras muy útiles, en el sentido que la clausura de un estrato puede estar contenida sólo en algunos de los otros, todo esto especificado por cierto orden parcial en el conjunto de índices {1, ..., r} definido por las normas de los X_i. Existen subgrupos reductivos $G_1, \ldots, G_r$ de GL(A) y cerrados Zariski $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_r$ de $\mathcal{X}$, respectivamente invariantes por $G_1, \ldots, G_r$, tales que

$$\mathcal{X} /// GL(A) = \mathcal{X}_1 // G_1 \cup \ldots \cup \mathcal{X}_r // G_r,$$

donde $\mathcal{X}_i // G_i$ es el cociente categórico. Para cada i se tiene además que

$$\mathcal{X}_i // G_i = \{\text{p en Crit(F) : m(p) es conjugado a } X_i\} / O(A).$$

Se concluye que el cociente $\mathcal{X}$///GL(A), sin haberse quedado en la categoría de varieda-

n	"dim"$\mathcal{L}/\sim$	dim$\mathcal{L}$	#CI($\mathcal{L}$)	#rígidas	#$\mathcal{N}/\sim$	"dim"$\mathcal{N}/\sim$	dim$\mathcal{N}$	#CI($\mathcal{N}$)
2	0	2	1	1	1	0	0	1
3	1	6	2	1	1	0	4	1
4	2	12	4	2	1	0	9	1
5	3	21	7	3	6	0	17	1
6	4	32	17	6	20	0	28	1
7	-	45	49	14	∞	1	40	2
8	-	-	-	-	∞	≥ 4	≥ 55	≥ 3
n >>	-	-	$\geq d_n$	$\geq d_n$	∞	$\geq c_n$	-	$\geq$ n

"dim"$\mathcal{L}/\sim$: cantidad máxima de parámetros que puede tener una familia contenida en $\mathcal{L}$/GL(A).
dim$\mathcal{L}$: dimensión de la variedad algebraica $\mathcal{L}$.
#CI($\mathcal{L}$) : cantidad de componentes irreducibles de $\mathcal{L}$L.
#rígidas : cantidad de álgebras de Lie rígidas.
#$\mathcal{N}/\sim$: cantidad de álgebras de Lie nilpotentes salvo isomorfismo.
"dim"$\mathcal{N}/\sim$: cantidad máxima de parámetros que puede tener una familia contenida en $\mathcal{N}$/GL(A).
dim$\mathcal{N}$: dimensión de la variedad algebraica $\mathcal{N}$.
#CI($\mathcal{N}$) : cantidad de componentes irreducibles de $\mathcal{N}$.
n >> : n suficientemente grande.
$d_n = e^{k\, n/\log(n)}$, donde $k = \log(2)^2/4$.
$c_n = (n-2)^3/48$.
- : problema abierto.

des algebraicas, no se ha ido tan lejos. Admite una estratificación o descomposición en subespacios homeomorfos a variedades algebraicas tal que la clausura de cada una de ellas está controlada de acuerdo a un cierto orden parcial en el conjunto de índices. ¿Define esto una categoría de espacios topológicos?

Ejemplo. Para n = 4, las componentes irreducibles de la variedad de álgebras de Lie $\mathcal{L}$ son todas clausuras de algún estrato (ver [9]).

Para más información sobre lo que sigue ver el artículo expositivo [10]. Sea $\mathcal{N}$ la variedad de álgebras de Lie nilpotentes. Ejemplos de puntos críticos de F en $\mathcal{N}$ incluyen todas las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión ≤ 6, los nilradicales de cualquier subálgebra parabólica de un álgebra de Lie semisimple, las álgebras de tipo-H y toda álgebra de Lie nilpotente con un ideal abeliano de codimensión 1. Es sorprendente, sin embargo, que las álgebras de Lie nilpotentes libres en su mayoría no tienen un punto crítico en sus órbitas.

Todo punto crítico p de F en $\mathcal{N}$ admite una graduación por los números naturales, es decir una descomposición en suma directa de subespacios

$$A = A_1 + \dots + A_r$$

(algunos podrían ser nulos) tal que $p(A_i,A_j)$ está contenido en A_{i+j} para todo i,j. Ésta es la única obstrucción algebraica general que se conoce, aunque también se pueden encontrar en la literatura varias álgebras de Lie nilpotentes graduadas que no admiten un punto crítico en sus órbitas, incluyendo ejemplos *2-pasos* nilpotentes (i.e. p(A,p(A,A)) = 0), *filiformes* (i.e. (n-1)-pasos nilpotentes) e incluso una curva en dimensión 9.

Nota. La siguiente interacción con Geometría Riemanniana ha sido muy fructífera en los últimos años, tanto en una como otra dirección, y es la principal responsable de la mayoría de los resultados descriptos más arriba: el cociente $\mathcal{N}$// /GL(A) parametriza las clases de isometría de métricas Riemannianas de Einstein en el espacio euclídeo $\mathbf{R}^{n+1}$ que son invariantes por un grupo de Lie soluble transitivo de difeomorfismos de $\mathbf{R}^{n+1}$, las cuáles son hasta ahora los únicos ejemplos de variedades homogéneas Einstein no compactas. A su vez, también las métricas en $\mathbf{R}^n$ llamadas solitones de Ricci que son invariantes por un grupo de Lie nilpotente de difeomorfismos son parametrizadas (salvo isometría) por $\mathcal{N}$//GL(A). Estas últimas corresponden a soluciones muy especiales del flujo de Ricci, estudiado profundamente en la teoría de Hamilton-Perelman usada para probar la Conjetura de Poincaré.

En la siguiente tabla se da una información actualizada de algunos resultados que se conocen sobre la clasificación de álgebras de Lie y las variedades $\mathcal{L}$ y $\mathcal{N}$. Referimos al lector a [5] para más información.

Referencias

[1] Burde, D., Steinhoff, C. *J. of Algebra* 214, 729 (1999).

[2] Eberlien, P., Jablonsky, M. Closed orbits of semisimple group actions and the real M function, preprint (2007).

[3] Gertenhaber, M. *Ann. Math.* 79, 59 (1964).

[4] Grunewald, F., O'Halloran, J. *J. of Algebra* 162, 210 (1993).

[5] Hakimdjanov, Y. *Handbook of Algebra* 2, 509 (2000), 509.

[6] Kempf, G., Ness, L. *Lect. Notes Math.* 732, 233 (1979).

[7] Kirwan, F. *Mathematical Notes* 31, Princeton Univ. Press, Princeton, 1984.

[8] Lauret, J. *Diff. Geom. Appl.* 18, 177 (2003).

[9] Lauret, J. *J. Funct. Anal.* 202, 392 (2003).

[10] Lauret, J. Einstein solvmanifolds and nilsolitons, Contemp. Math., en prensa.

[11] Marian, A. *Math. Res. Lett.* 8, 779 (2001).

[12] Mumford, D., Fogarty, J., Kirwan, F. Geometric Invariant Theory, 3^{rd}. Edit., Springer Verlag (1994).

[13] Ness, L. *Amer. J. Math.* 106, 1281 (1984), (with an appendix by D. Mumford).

[14] Richardson, R.W., Slodowy, *J. London Math. Soc.* (2), 409 (1990).

[15] Sjamaar, R. *Adv. Math.* 138, 46 (1998).

[16] Popov, V.L., Vinberg, E.B. *Encyclopaedia of Math. Sciences* 55, Springer-Verlag (1994).

[17] Seeley, C. *Commun. in Algebra* 18, 3493 (1990).

[18] Vergne, M. *Bull. Soc. Math. France* 98, 81 (1970).

Manuscrito recibido el 30 de abril de 2008.
Aceptado el 20 de mayo de 2008.