Anal. Acad. Nac. Cs. Ex. Fís. Nat., Buenos Aires, tomo 38, 1986

INTEGRALES SINGULARES Y OPERADORES SEUDODIFERENCIALES - HISTORIA Y PERSPECTIVA

por *Alberto P. Calderón*

En primer lugar quiero hacer público mi agradecimiento por la honra que significa para mí el haber sido elegido miembro de número de esta Academia. Esto se debe, sin duda, a una muy generosa evaluación de mis méritos.

Quiero hablarles de un tema al cual he dedicado gran parte de mis esfuerzos, a saber, el de las integrales singulares, y tratar de hacer comprender su razón de ser a los no especialistas y tal vez, aún, a cultores de otras disciplinas no matemáticas.

Para lograr ésto es necesario hacer comprender la relación de las integrales singulares con los operadores diferenciales e integrales. Por ello comenzaré explicando éstos, describiendo sus propiedades más salientes y su importancia. Daré por conocidas las nociones matemáticas de derivación e integración y a partir de éstas, utilizando un lenguaje más sugestivo que preciso, intentaré dar una visión suficientemente clara del tema que nos ocupa. Luego describiré brevemente el origen y evolución de estos conceptos y ello me obligará —me disculpo por esto ante mis oyentes no matemáticos— a entrar en detalles técnicos.

La derivación es la operación que aplicada a una función de una variable da otra, su derivada, que en cada punto tiene por valor la pendiente de la tangente a la gráfica de aquélla en el punto correspondiente. Las derivaciones parciales son las operaciones que se obtienen fijando todas las variables menos una de una función de varias variables, y aplicando la operación anterior. Un operador diferencial, u operación diferencial, es el que se obtiene combinando las derivaciones con otras operaciones, en general algebraicas, como suma, producto, multiplicación por funciones, etc.

Una ecuación diferencial prescribe el resultado de aplicar un operador diferencial a una función incógnita.

Aparte de su interés puramente matemático, el estudio de los operadores y ecuaciones diferenciales es importante por su aplicación a otras disciplinas.

En efecto, por ejemplo, una proporción elevada de las leyes de la física se formulan mediante ecuaciones diferenciales en que las incógnitas son las funciones que describen los efectos de causas dadas.

Veamos ahora algunas de las propiedades de estas operaciones diferenciales. Una de ellas es su carácter local, es decir, el resultado en un punto de aplicar un operador diferencial a una función sólo depende de los valores de ésta en una vecindad arbitrariamente pequeña del mismo. Esto se comprende fácilmente si se piensa en la pendiente de la tangente a su gráfica en ese punto. Ella, evidentemente, sólo depende de los puntos de la gráfica arbitrariamente próximos a aquél.

Físicamente esto significa que los operadores diferenciales describen acciones por contigüidad.

Otra característica de los operadores diferenciales es su inestabilidad o discontinuidad. El resultado de aplicar un operador diferencial a una función puede sufrir grandes cambios si se cambia o modifica ésta, aún si su modificación es muy pequeña. Nuevamente, esto se comprende si se piensa en la gráfica de la función. Muy pequeñas modificaciones de la gráfica pueden producir grandes cambios en las pendientes de las tangentes, y es interesante destacar que esto ocurre cualquiera que sea prácticamente el modo cuantitativo o cualitativo que se adopte para medir o estimar estos cambios. Esto ocurre a menos de restringirse a clases de funciones que son insuficientes para tratar los problemas de mayor interés. Esta inestabilidad es una de las causas más importantes de la dificultad del estudio de estos operadores.

Entre los operadores diferenciales hay una clase de ellos de particular importancia, a saber, los lineales. Ellos aparecen en el estudio de fenómenos en los que vale el principio de superposición, es decir en los que a suma de causas corresponde suma de efectos. Estos operadores son sumas de productos de funciones dadas —los coeficientes— por derivadas, o derivadas de derivadas, etc. de la función sobre la cual operan, y poseen un cálculo funcional aproximado. Los cálculos funcionales consisten en asignar a cada operador un ente matemático sencillo, en nuestro caso el polinomio característico del operador diferencial, de modo que a la suma y aplicación sucesiva de aquéllos corresponda suma y multiplicación de éstos.

En nuestro caso, el cálculo funcional de polinomios característicos está sin embargo sujeto a severas limitaciones que afectan su utilidad puesto que, por un lado los operadores diferenciales no pueden componerse, es decir, aplicarse sucesivamente, con libertad y por otro, ciertas operaciones importantes como la inversión no son posibles con polinomios.

Pasemos ahora a describir brevemente los operadores integrales y algunas de sus propiedades. Estos se obtienen por integración de expresiones que contienen la función sobre la cual operan, y combinando esto con otras expresiones en general algebraicas que contienen aquéllas. Entre éstos los lineales son aquellos para cuales que vale el principio de superposición, o en que las expresiones que aparecen son lineales en la función. Físicamente ellos describen acciones a distancia como, por ejemplo, los que dan el potencial gravitatorio o el campo gravitatorio en función de la distribución de masas.

Estos operadores tienen propiedades opuestas a las de los operadores diferenciales. Son continuos o estables con respecto a muchos modos (topologías) naturales de medir o estimar cambios de las funciones y, en general, carecen de cálculos funcionales sencillos.

Los operadores integrales singulares pueden ser concebidos como entes híbridos o intermedios entre los diferenciales y las integrales. Son operadores integrales lineales en que las expresiones a integrar dan lugar a integrales divergentes, es decir, sin sentido como integrales ordinarias y a las cuales es necesario definir como límite de integrales comunes. Más específicamente, las expresiones a integrar tienen el orden de magnitud de la inversa de la distancia a un punto elevada a la dimensión del espacio o número de variables de las funciones sobre las que se opera, lo que las sitúa justo al borde de la integrabilidad. Esto hace de ellas operadores semilocales, es decir, hay acciones a distancia, pero la acción sobre un punto está dominada por la de puntos arbitrariamente próximos.

Lo interesante de estos operadores es que comparten las buenas propiedades, algunas de ellas mejoradas, tanto de los operadores diferenciales como de los integrales, es decir, son continuos con respecto a muchos modos naturales de medir diferencias entre funciones (topologías), se pueden aplicar sucesivamente con plena libertad y poseen un cálculo funcional muy general, sencillo y flexible.

Este consiste en asociar a cada operador una función de un punto y una dirección, llamada símbolo del operador, de modo que a suma de operadores corresponda suma de símbolos y a aplicación sucesiva de operadores corresponda el producto de símbolos. También los rasgos más prominentes del operador están dados por su símbolo y éste determina aquél a menos de otro que tiene muy buenas propiedades y que en muchas situaciones se puede no tener en cuenta o bien manipular sin dificultad. Por último, cada función de punto y dirección moderadamente lisa o regular es el símbolo de un operador. Todo esto hace de los operadores integrales singulares un instrumento flexible y de manejo relativamente fácil.

Finalmente, estos operadores tienen una propiedad más en la cual, dadas las propiedades ya descriptas, radica su importancia. Esta es la siguiente:

Todo operador diferencial lineal se puede obtener como composición, es decir aplicación sucesiva, de dos operadores siendo uno de ellos una potencia de un único operador diferencial, a saber el laplaciano, y el otro un operador integral singular cuyo símbolo está dado por el polinomio característico del operador diferencial evaluado en el punto de la esfera unitaria que determina una dirección.

Esta descomposición de los operadores diferenciales lineales los inserta en una clase más amplia de operadores que son las composiciones que acabo de describir y facilita enormemente su manipulación. A los operadores de esta clase se los llama ahora pseudo-diferenciales y su uso a permeado la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales lineales.

No quiero terminar esta descripción de los operadores integrales singulares y de su inserción en las Matemáticas sin destacar que casos especiales de ellos aparecieron espontáneamente en otros capítulos de esta disciplina sin relación directa o, al menos, relacionados en forma distinta a la ya descripta con los operadores diferenciales.

El ejemplo tal vez más importante de ésto es el de la transformada de Hilbert que está dada por el operador integral singular más sencillo y que juega un papel importante en la teoría de funciones analíticas. Otro ejemplo son las ecuaciones integrales singulares que aparecen en el estudio de problemas de contorno para la ecuación de Laplace en el plano mediante potenciales de capa.

Me excuso de entrar ahora en detalles de ésto pues lo haré al describir la historia del tema. Pasemos ahora a hacer un esbozo del desarrollo de la teoría.

La noción de valor principal de una integral divergente, que es la que se usa en la definición de los operadores integrales singulares, fue introducida en el caso de una variable por Cauchy. Si una función no es integrable porque su valor crece demasiado al aproximarse a un punto, se excluye un intervalo centrado en ese punto, se integra sobre el resto y se pasa al límite haciendo tender la longitud del intervalo a cero. Si la contribución de los valores grandes positivos de la función se compensa adecuadamente con la de los negativos, el límite existe y éste es lo que se llama valor principal de la integral.

En el caso de funciones de varias variables se excluye una bola centrada y se aplica un procedimiento semejante.

Los siguientes problemas planteados por Hilbert, Plemelj y Poincaré parecen ser la primera fuente del estudio de las integrales singulares.

Sea Ω un recinto acotado del plano complejo simplemente conexo cuya frontera Γ es una curva lisa o regular, y Ω_c el recinto complementario, entonces los problemas son:

a) Encontrar una función analítica $(F(z) = u + iv$ en Ω de modo que $ua + vb = f$ en Γ donde a, b y f son funciones reales sobre Γ (Hilbert 1904.

b) Encontrar funciones F y G analíticas en Ω y Ω_c respectivamente, de modo que $F = f\ G$ en Γ donde f es una función de valores complejos en Γ (Hilbert 1905).

c) Encontrar F y G como en b) y con $G \to 0$ en el infinito de modo que F — G = f en Γ donde ahora f es una función de valores complejos Γ dada (Plemelj 1908).

d) Encontrar una función u armónica en Ω de modo que $\frac{\partial}{\partial \nu} = f$ en Γ donde ν es un campo de vectores dado sobre Γ transversal a Γ y f es también una función en Γ (problema de la derivada oblicua) (Poincaré 1910).

En todos estos problemas al hablar de valores en Γ de funciones en Ω o Ω_c estamos refiriéndonos a los límites que se suponen existentes de los valores de aquéllas al aproximarse a puntos de Γ.

La solución dada al problema c) por Plemelj muestra claramente cómo intervienen las integrales singulares en ellos. Consideremos la siguiente integral sobre la frontera

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{s} (s-z)^{-1} \varnothing (s)\, ds$$

donde ∅ es una función sobre Γ, z es un punto de Ω, o Ω_c, que nos da una función analítica F en Ω y otra G en Ω_c que tiende a cero en el infinito.

No es difícil ver que, si ∅ es una función que satisface una condición de Hölder entonces estas funciones tienen límites en T que están dados por

$$F(t) = \frac{1}{2} \varnothing (t) + \frac{1}{2\pi i} \text{ v. p.} \int_{\Gamma} \frac{\varnothing (s)}{s-t} ds$$

$$G(t) = -\frac{1}{2} \varnothing (t) + \frac{1}{2\pi i} \text{ v. p.} \int_{\Gamma} \frac{\varnothing (s)}{s-t} ds$$

donde la integral en el miembro derecho de estas expresiones es una integral singular que tiene sentido como valor principal. Esto resuelve el problema c), tomando simplemente ∅ (s) = f (x). El operador

$$(H \varnothing)(t) = \frac{1}{\pi i} \text{ v. p.} \int_{\Gamma} \frac{\varnothing (s)}{s-t} ds$$

que en el caso en que Ω es un semiplano, es llamada transformación de Hilbert, tiene la propiedad, también fácil de deducir, que $H^2 = I$, la identidad, es decir que H es su propia inversa.

Los otros problemas llevan por métodos semejantes a resolver una ecuación integral singular T de la forma

$$a(t) \varnothing (t) + b(t) (H\varnothing)(t) + K\varnothing = f(t)$$

donde las funciones a, b y f son funciones dadas y K es un operador integral ordinario. Dado que $H^2 = I$, se puede intentar resolverla multiplicándola por a—bH, lo que da

$$(a^2-b^2)\varnothing - b\,(Ha-aH)\varnothing - b\,(Hb-bH)H\varnothing + (a-bH)K\varnothing = (a-bH)f$$

Si $a^2-b^2 \neq 0$, dividiendo por esta función se obtiene la ecuación

$$\varnothing + K_1\varnothing = f_1$$

donde si a y b satisfacen una condición de Hölder, K_1 es un operador integral ordinario y así se puede aplicar a ésta los métodos de la teoría de Fredholm. Esto plantea inmediatamente algunos interrogantes, por ejemplo:

1) ¿En qué clases de funciones está bien definido el operador H? No es demasiado difícil ver que éste está bien definido sobre las clases de Hölder y que opera contínuamente sobre éstas (Privaloff 1916). ¿Pero qué puede decirse de otras, como las clases de Lebesgue?
2) ¿Qué propiedades tienen los conmutadores Ha—aH, Hb—bH?
3) ¿Se introducen falsas soluciones al multiplicar por a—bH?
4) ¿Qué significado tiene la condición $a^2-b^2 \neq 0$?
5) Es posible generalizar este método a varias variables para tratar problemas semejantes al d), en espacios de dimensión superior a dos?
6) ¿En qué medida es posible relajar las condiciones de regularidad que se pide de T?

   Es probable que estos problemas hayan sido la fuerza motriz que produjo el desarrollo de la teoría. También vale la pena destacar que, si bien los problemas planteados por Hilbert, Plemelj y Poincaré son problemas de ecuaciones en derivadas parciales, la relación general entre los operadores integrales singulares y los diferenciales no se insinúa en ellos.

El problema 1) fue resuelto por M. Riesz en 1928, quien usando la íntima relación entre H y las funciones analíticas, demostró que H está bien definido y es continuo en las clases de Lebesgue L^p. También A. Besicovitch (1926) y E. C. Titchmarsh (1929) introdujeron métodos de variable real en su estudio. El primer intento de generalización a varias variables del operador H fue el de F. G. Trícomi en 1925 y 1928 quien consideró operadores de la forma

$$Tf = \text{v.p.} \int h\,(x-y)\, f\,(y)\, dy$$

sobre funciones de dos variables en el plano, donde h(x) es una función homogénea de grado -2 y dio un método para construir otro operador S del mismo tipo tal que ST = I. Esto lo logró reduciendo el problema al de una ecuación integral singular de una variable. Sin embargo no dio una condición sencilla para la posibilidad de solución del mismo semejante a $a^2-b^2 \neq 0$ de 4).

La siguiente contribución importante fue la de G. Giraud quien abordó el problema de generalizar el método de las integrales para el estudio del problema d) de Poincaré en el caso de dimensión superior a dos. En un trabajo en 1934 estudió operadores integrales singulares sobre variedades, mostró su invariancia por cambio de coordenadas, su continuidad en espacios de Hölder y en algunos casos logró la reducción de ecuaciones singulares a ecuaciones de Fredholm pero aquí también faltó una condición simple para la posibilidad de esta reducción. Esta condición fue dada por S. G. Mihlin en 1936 quien mostró que si al operador

$$Tf = \text{v. p.} \int h\,(x-y)\,f\,(y)\,dy$$

considerado por Tricomi se le asocia la función $\Sigma a_n \gamma_n \, e^{in\theta}$, que él llamó símbolo, donde las γ_n son ciertas constantes y $\Sigma a_n \, e^{in\theta}$ es la serie de Fourier de h $(e^{i\theta})$, es decir la restricción de h a la circunferencia unitaria, entonces el símbolo de la composición de dos operadores de este tipo es el producto de los símbolos correspondientes.

Con esto resolvió el problema de inversión de estos operadores y de la reducción de ecuaciones integrales singulares a ecuaciones de Fredholm. Giraud generalizó inmediatamente este resultado al caso de n dimensiones utilizando desarrollos en serie de armónicos esféricos. Sin embargo, la naturaleza del símbolo siguió siendo misteriosa hasta 1952 en que quedó aclarada, al menos en el caso de operadores del tipo estudiado por Tricomi, es decir de convolución. Si consideramos el operador sobre funciones de n variables

$$Tf = \text{v. p} \int_{R^n} k\,(x-y)\,f\,(y)\,dy + cf$$

donde k(x) es una función homogénea de grado $-n$ de valor medio cero sobre la esfera $|x| = 1$ y c una constante entonces el símbolo no es más que c más la transformada de Fourier de k(x). Motivados por el estudio de las propiedades de diferenciabilidad del potencial newtoniano el Profesor Zygmund y yo fuimos llevados a estudiar estos operadores y logramos no sólo comprender la noción de símbolo sino también mostrar que estos operadores tienen sentido en los espacios de Lebesgue L^p y son continuos en ellos si $1 < p < \infty$. También logramos una comprensión clara de las propiedades de diferenciabilidad del potencial. Estos resultados fueron extendidos posteriormente a las soluciones de ecuaciones y sistemas elípticos por Amon Douglis y Nirenberg (1959) y el Prof. Zygmund y yo (1965).

Ese trabajo de 1952 estimuló el interés en los operadores integrales y a partir de entonces hubo una renovada actividad en el tema. Así, por ejemplo, se logró reducir el estudio de las propiedades de continuidad del operador

$$Tf = a(x)\, f(x) + \text{v. p.} \int_{R^n} k(x, x-y)\, f(y)\, dy$$

donde $k(x,z)$ es una función homogénea de grado $-n$ de valor medio nulo en $|z| = 1$ al caso de la transformada de Hilbert (1956), empleando el llamado método de las rotaciones que es aplicable en otras situaciones de interés.

Poco después, en 1957, en un intento por extender al caso de n variables el resultado de Carleman sobre la unicidad de las soluciones del problema de Cauchy para las ecuaciones y sistemas diferenciales de dos variables en el caso no analítico se tomó conciencia de que un operador diferencial monomio $(\partial/\partial x)^{\alpha}$ es expresable como composición de un operador integral singular y una potencia $\Delta^{\alpha_1/2}$ del laplaciano. Esto se ve inmediatamente tomando transformadas de Fourier y se extiende también inmediatamente al caso de operadores diferenciales lineales con coeficientes variables que se representan entonces como la composición $T\Delta^{m/2}$ donde m es el orden del operador, Δ el laplaciano y

$$Tf = a(x)f(x) + \text{v.p.}\int k(x,x-y)f(y)dy + Rf$$

Aquí el operador R que se agrega a los operadores considerados anteriormente, es uno que al operar por ejemplo sobre una función de L^p, si los coeficientes del operador diferencial son suficientemente regulares, nos da una función de L^p con derivadas primeras en L^p, por lo que se lo llama regularizante. Se mostró entonces que estos operadores forman un álgebra en que los símbolos

$$\sigma(T) = a(x) + \text{v.p.}\int k(x,z)\, e^{2\pi i y z}\, dz$$

son aditivos y multiplicativos (1957).

Esto permite manipular fácilmente la parte principal de estos operadores, que está dada por sus símbolos, y reducir sistemas de ecuaciones a sistemas de primer orden, diagonalizar las partes principales de matrices de operadores, etc. La primera aplicación de este instrumento fue la extensión del resultado de Carleman (1958). Poco después se obtuvieron otros resultados en la teoría de ecuaciones diferenciales, por ejemplo, el tratamiento de la teoría de Leray de los sistemas totalmente hiperbólicos por este método (1960), la descripción de los datos de Cauchy en la frontera de soluciones de una ecuación o sistema elíptico homogéneo en un recinto como la imagen de datos de Cauchy generales por un operador de proyección que está dado por operadores integrales singulares (1963) y que permitió un tratamiento unificado de los problemas de contorno de sistemas elípticos generales. En esto último se usaron los resultados de la tesis doctoral de R. T. Seeley (1959) en la que se extiende a variedades compactas la teoría de operadores en el espacio euclídeo, y en la que se aclara definitivamente el concepto de símbolo en el caso más general como una función sobre el fibrado cotangente a la variedad.

Este trabajo de Seeley tuvo también otras consecuencias muy importantes, entre ellas, tal vez la más importante, fue la solución del problema del índice de sistemas elípticos sobre variedades compactas y de su interpretación topológica, planteado en su máxima generalidad por Gelfand en 1960 y resuelto por Atiyah y Singer quienes usaron el instrumental introducido por Seeley para demostrar su famoso teorema del índice (1963). Este problema se originó con el estudio del efecto de multiplicar una ecuación integral singular sobre una curva plana por a-bH, cuestión mencionada al principio de esta reseña histórica.

F. Noether notó que esta multiplicación puede efectivamente introducir soluciones extrañas, hecho que Poincaré había pasado por alto, y resolvió el problema calculando el índice del operador a-bH, que es la codimensión de la imagen del mismo menos la dimensión de su espacio nulo, que coincide con el número de vueltas que da el vector $(a + b)/(a - b)$ en torno al origen al recorrer la curva Γ (1921). Entre la aparición del trabajo de Noether y la solución definitiva y general del problema por Atiyah y Singer casos especiales fueron resueltos por Atkinson, Gohberg, Krein, Kato, Cordes y Labrousse.

Estas novedades interesaron vivamente a la comunidad matemática y causaron un torrente de importantes generalizaciones y refinamientos a los cuales, dadas su cantidad y complejidad, me es imposible hacer justicia en esta breve exposición. Mencionaré solamente algunas de ellas y terminaré describiendo más en detalle un desarrollo de data más reciente que tiene interés especial para mí. Entre esas generalizaciones es necesario destacar:

i) La extensión de la teoría a operadores con núcleos con homogeneidad mixta por Fabes, de Guzmán, F. Jones, Riviere con vista al estudio de operadores de tipo parabólico y afines.

ii) La teoría de los operadores pseudo-diferenciales de Kohn y Nirenberg con el estudio completo de su cálculo funcional mediante el llamado símbolo completo del cual el símbolo descrito anteriormente es sólo parte.

iii) Las generalizaciones de esta última teoría de Hörmander, Beals C. Fefferman con vista entre otras cosas a la obtención de estimaciones subelípticas.

iv) La teoría de los operadores integrales de Fourier de Duistermaat y Hörmander que permite la aplicación rigurosa de métodos de la óptica geométrica a las ecuaciones en derivadas parciales.

v) La teoría de pesos, iniciada por B. Muckenhoupt y su aplicación a la teoría de integrales singulares.

vi) La teoría de operadores integrales singulares sobre funciones de valores vectoriales de Benedek, Hörmander, Panzone, J. Schwartz y mía, que permite reducir la teoría de Littlewood-Paley a la de integrales singulares.

Es necesario destacar que, tal vez por su refinamiento, algunas de estas teorías exigen para su aplicación a operadores diferenciales que estos tengan coeficientes infinitamente diferenciables y que los recintos donde se plantean problemas de contorno tengan fronteras regulares. Como en muchos casos de aplicación esto no se da, éstos quedan fuera de su alcance. Esto ocurre, por ejemplo, en la práctica ingenieril donde a veces es necesario resolver problemas de contorno en recintos con aristas, vértices, etc. Ello estimuló el estudio de las hipótesis mínimas de regularidad de los coeficientes para que los operadores R que mencionamos anteriormente y que llamamos regularizantes, efectivamente lo sean, y las condiciones sobre la frontera del recinto Ω, mencionado al principio de esta reseña, para que el operador H sea contínuo en L^2. El primero de estos problemas se reduce al estudio de las condiciones necesarias y suficientes sobre una función $a(x)$ para que el conmutador Ha-aH sea regularizante, o, equivalentemente, para que el operador

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(t)-a(s)}{(t-s)^2} f(s)\,ds$$

sobre funciones sobre la recta real sea contínuo en L^2. Este problema fue resuelto en 1965 utilizando la teoría de funciones analíticas y mostrando la continuidad de operador si $a(x)$ es meramente lipschitziana. Esto permite extender la teoría de integrales singulares de modo que sea aplicable a operadores diferenciales con coeficientes lipschitzianos. Resultados sobre operadores diferenciales con coeficientes menos regulares, como los de di Giorgi y Nash sobre la regularidad de las soluciones débiles de ecuaciones elípticas con coeficientes meramente acotados, parecen estar completamente fuera del alcance de la teoría, salvo, como lo hizo notar Vekua, en el caso de dos variables.

El estudio de ciertos problemas de contorno en recintos con fronteras lipschitzianas mediante potenciales de capa, se reduce al estudio de la continuidad de ciertas integrales singulares sobre la frontera que a su vez se pueden reducir al estudio del operador H sobre gráficas de funciones lipschitzianas. De ahí el interés de este operador que es justamente la integral de Cauchy sobre estas gráficas, y que se puede escribir así

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(s)\,ds}{(t-s) + i[a(t)-a(s)]}$$

donde la gráfica es la de la función a (t). Si $|a'(t)| \leqslant 1-\epsilon$ entonces el núcleo de esta integral se puede desarrollar en la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[a(t)-a(s)]^k}{(t-s)^{k+1}} (-i)^k$$

El segundo de estos núcleos da un operador acotado en L^2, como vimos, pero el método usado para mostrar ésto no es de ningún modo aplicable a los demás. Estos fueron estudiados por Coifman y Meyer, quienes en 1977 lograron al fin mostrar que también ellos dan operadores acotados en L^2, pero desgraciadamente su estimación de las normas correspondientes no permitió sumar la serie. Por otro lado, si se multiplica a(x) por un parámetro real λ y se deriva respecto de λ, se obtiene el operador

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(t)-a(s)}{[(t-s) + i[a(t)-a(s)]\lambda]^2} f(s)\,ds$$

cuyo núcleo se asemeja al segundo término de la serie, y el método usado para tratar a éste es aplicable en este caso y da una estimación de su norma en función de la del operador

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t-s) + i\lambda[a(t)-a(s)]} f(s)\,ds$$

Esto da una desigualdad diferencial para la norma de éste como función de λ, y éste para $\lambda = 0$, se reduce a la transformada de Hilbert. Así se pudo mostrar, al fin, que la integral de Cauchy sobre gráficas de funciones de Lipschitz es acotada en L^2, al menos si la derivada a'(x) es suficientemente pequeña. Esta restricción sobre a'(x) fue eliminada poco después por David y Coifman, Meyer y McIntosh.

David también obtuvo una condición sencilla necesaria y suficiente para el operador H sobre curva sea acotado en L^2, a saber la curva debe ser casi-lipschtziana, es decir su intersección con un disco cualquiera debe tener longitud menor que una constante por el radio del mismo.

También J. L. Journé y T. Murai mejoraron y generalizaron estos resultados. En 1985 Murai mostró que el operador

$$\text{v.p.} \int_{\infty-}^{\infty+} \frac{1}{t-s} \exp \left| in \frac{a(t)-a(s)}{t-s} \right| f(s)\,ds$$

tiene una norma del orden de $n^{1/2+\epsilon}$, $\varepsilon > 0$ y que este exponente es óptimo. De esto se deduce que el operador

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x-y} \, F\left(\frac{a(x)-a(y)}{x-y}\right) f(y)\,dy,$$

es acotado si F es de la clase de Sobolev $H_{1+\varepsilon}$.

Aún quedan algunas cuestiones pendientes en esta área que, si se resuelven favorablemente permitirán profundizar y generalizar los resultados ya obtenidos sobre problemas de contorno. Una de ellas es, por ejemplo, estudiar el álgebra generada por los operadores que aparecen naturalmente en el estudio de esos problemas y averiguar si ella posee un cálculo funcional sencillo semejante al del símbolo.

Muchas gracias.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. Agmon, A. Douglis y L. Nirenberg, 1959. *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 12: 623-727.

[2] M. F. Atiyah y I. M. Singer, 1963. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69: 422-433.

[3] R. Beals y C. Fefferman, 1974. *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 27: 1-24.

[4] A. Benedek, A. P. Calderón y R. Panzone, 1962, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, vol. 48, núm. 3: 356-365.

[5] A. Besicovith, 1926. *J. London Math. Soc.* 1: 120-128.

[6] A. P. Calderón, 1958. *Amer. J. Math.* 80: 16-36.

[7] A. P. Calderón, 1960. *Cursos y Seminarios de Mat. UBA.*, Fasc. 3.

[8] A. P. Calderón, 1963. *Outlines Sov.-Amer. Sympo. Part. Diff. Eq.*, Novosibirsk, 303-304.

[9] A. P. Calderón, 1965. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 53: 1092-1099.

[10] A. P. Calderón, 1977. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.*, 74: 1324-1327.

[11] A. P. Calderón y A. Zygmund, 1952. *Acta Math.*, 88: 85-139.

[12] A. P. Calderón y A. Zygmund, 1956. *Amer. J. Math.*, 78: 289-300.

[13] A. P. Calderón y A. Zygmund, 1961. *Studia Math.* 30: 171-225.

[14] R. Coifman y Y. Meyer, 1975. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 212: 1324-1327

[15] R. Coifman, A. McIntosh Y. Meyer, 1982. *Ann. of Math.* 116: 361-387.

[16] G. David, 1984. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, serie 4, 17: 157-189.

[17] M. de Guzmán, 1968. *Tesis, Univ. of Chicago.*

[18] J. J. Duistermaat y L. Hörmander, 1972. *Acta Math.* 128: 183-269.

[19] E. B. Fabes y N. M. Riviere, 1966. *Studia Math.* 27: 19-38.

[20] G. Giraud, 1934. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* 51: 251-372.

[21] G. Giraud, 1935. *Comp. Rend. Acad. Sci.* Paris 200: 1651-1653.
[22] R. F. Gundy y R. L. Wheeden, 1975. *Studia Math.* 49: 107-124.
[23] D. Hilbert, 1904. *Verh. III Intern. Math. Kongresses,* Heidelberg.
[24] D. Hilbert, 1905. *Göttingen Nachrichten.*
[25] L. Hörmander, 1960. *Acta Math.* 104: 93-139.
[26] L. Hörmander, 1967. *Proc. of Symp. in Pure Math.,* Amer. Math. Soc., X: 138-183.
[27] L. Hörmander, 1971. *Acta Math.* 27: 79-183.
[28] B. F. Jones, 1964. *Amer. J. Math.* 86: 441-462.
[29] J. L. Journé, 1983. *Lecture Notes,* Springer Verlag 994.
[30] J. J. Kohn y L. Nirenberg, 1965. *Comm. Pure Appl. Math.* 18: 269-305.
[31] S. G. Mihlin, 1936. *Dokl. Akad. Nauk. URSS* 2: 3-6.
[32] T. Murai, 1986. *Advances in Math.,* 59: 71-81.
[33] F. Noether, 1921. *Math. Ann.* 82: 42-63.
[34] J. Plemelj, 1908. *Monatsh. Math. Phys.* 19: 205-210, 211-245.
[35] H. Poincaré, 1910. *Leçons de Mécanique céleste,* vol. 3, Paris.
[36] J. Privaloff, 1916. *Bull. Soc. Math. France* 44: 100-103.
[37] M. Riesz, 1928. *Math. Z.* 27: 218-244.
[38] R. T. Seeley, 1959. *Amer. J. Math.* 81: 658-690.
[39] J. Schwartz, 1961. *Comm. Pure Appl. Math* 14: 785-799.
[40] E. C. Titchmarsh, 1929. *Proc. London Math. Soc.* 29: 49-80.
[41] F. G. Tricomi, 1926. *Rend. Accad. Naz. Lincei* 3: 535-539
[42] F. G. Tricomi, 1928. *Math. Z.* 27: 87-133