Anal. Acad. Nac. Cs. Ex. Fís. Nat., Buenos Aires, tomo 38, 1986

CONJUNTOS DE PRODUCCION DISTRIBUCIONALES

por *Julio H. G. Olivera* [1]

Offenbart sich die Zeit selbst als Horizont des Seins?

HEIDEGGER

En un trabajo anterior (1984) propusimos representar los factores de producción y los productos como "funciones generalizadas" del tiempo. Verificamos allí que este método no sólo permite incorporar ampliamente en la teoría de la producción la configuración temporal de las relaciones tecnológicas, sino que proporciona además nuevas e interesantes posibilidades al análisis económico en el campo operativo. En particular, sin necesidad de restringir la sustitución entre factores, vimos que en caso de rendimientos constantes a escala la transformación productiva puede especificarse mediante una matriz cuya transformada de Laplace es una matriz numérica de orden finito.

El presente ensayo tiene por objeto formular una versión distribucional del "conjunto de producción", en correspondencia con el operador de producción que estudiamos en el trabajo referido. Hallaremos que el conjunto de producción distribucional puede sujetarse a los mismos axiomas que los conjuntos de producción ordinarios de la teoría económica y presenta todas sus propiedades fundamentales. También determinaremos las condiciones bajo las cuales el conjunto de producción distribucional (más exactamente, la "versión stock" de dicho conjunto) resulta igual a la representación gráfica de aquel operador.

Como en el trabajo mencionado, indicaremos con y_i una distribución que expresa la cantidad producida del bien i, denotando con x_i una distribución que expresa la cantidad empleada de dicho bien. Supondremos que ambas son distribuciones con soporte compacto, pues el proceso productivo tiene principio y fin en el tiempo. El *producto neto* es entonces $z_i = y_i - x_i$. Si existen n bienes, el vector

$$z = (z_1,\dots,z_n)$$

define una actividad productiva.

[1] Profesor titular de Teoría Económica, Universidad de Buenos Aires.

Resulta inmediatamente que

$$z \varepsilon (E')^n,$$

donde E' denota el espacio de las distribuciones reales con soporte compacto. Además de la estructura topológica de E' consideraremos sus características como espacio lineal ordenado. Diremos que una distribución z_i es $\geqq 0$ si $z_i)f) \geqq 0$ cuando $f \geqq 0$. Escribiremos $z \geqq 0$ para dar a entender que $z_i \geqq 0$, $i = 1,...,n$; pero usaremos el símbolo $z \geq 0$ en caso de que $z \geqq 0$ y una al menos de las z_i no sea nula.

A semejanza de la terminología usual, llamaremos *conjunto de producción* al conjunto de las actividades productivas posibles bajo condiciones tecnológicas dadas. Dicho conjunto, que denominaremos Z, es así un subconjunto de $(E')^n$ con la topología y el orden inducidos por este espacio. Sus propiedades normales se especifican a través de los siguientes axiomas:

A1. Posibilidad de la inacción:

$$0 \varepsilon Z.$$

A2. Posibilidad de la acción:

$$\exists z \varepsilon Z: \; z \neq 0.$$

A3. Imposibilidad de la producción gratuita:

$$(z \geqq 0, \; z \varepsilon Z) \Rightarrow z = 0$$

A4. Libre disposición:

$$(z \varepsilon Z, \; z \geqq y) \Rightarrow y \varepsilon Z.$$

A5. Continuidad:

$$(z_j \rightarrow z, \; z_j \epsilon Z) \Rightarrow z \varepsilon Z.$$

A6. Divisibilidad:

$$z \epsilon Z \Rightarrow \lambda z \varepsilon Z, \text{ para todo } \lambda \varepsilon (0,1) \subset R.$$

A7. Aditividad:

$$(y \varepsilon Z, \; z \varepsilon Z) \Rightarrow (y + z) \epsilon Z.$$

En A1-A3, el 0 significa la distribución nula. La convergencia considerada en A5 es la propia de $(E')^n$. Por virtud de A6 y A7, el conjunto de producción es convexo y exhibe rendimientos constantes a escala (geométricamente, es un cono convexo).

Los axiomas precedentes coinciden con los usuales para conjuntos de producción ordinarios. Su fundamentación es idéntica y pueden objetarse o defenderse con las mismas razones que se aducen respecto de los conjuntos de producción convencionales (cf. Koopmans, 1957, págs. 74-77).

Una aplicación importante del concepto de conjunto de producción es el análisis de eficiencia productiva y maximización de ganancias. Para examinar este asunto se requieren algunas definiciones preliminares. Consideraremos que una actividad y es *más eficiente* que otra actividad z si $y \geq z$, o sea si en la primera actividad la producción neta de cada bien no es menor, y al menos para uno de los bienes resulta estrictamente mayor, que en la segunda actividad. Diremos que y es *eficiente* si no existe ninguna otra actividad productiva más eficiente. El concepto habitual de eficiencia se trasvasa de tal modo sin dificultad a los conjuntos de producción distribucionales: en particular, como en el contexto ordinario, es independiente del *sistema de precios*. Por sistema de precios entendemos aquí cualquier elemento de $[(E')^n]'$, el dual topológico de $(E')^n$. Esta definición coincide con la noción acostumbrada de sistema o vector de precios en el caso del conjunto de producción ordinario, que es un subconjunto del espacio real n-dimensional.

Dado un sistema de precios p y una actividad z, el escalar p(z) es la ganancia de la unidad de producción. Diremos que z^* es una *actividad maximizadora de ganancias* con el sistema de precios p si $p(z^*) \geqq p(z)$ para toda $z \in Z$. Emplearemos la notación siguiente:

$$p \geqq 0 \text{ si } p(z) \geqq 0 \text{ para toda } z \geqq 0;$$

$$p \geq 0 \text{ si } p \geqq 0,\ p \neq 0;$$

$$p > 0 \text{ si } p(z) > 0 \text{ para toda } z \geq 0.$$

Vamos a deducir ahora, para el conjunto de producción distribucional, las dos proposiciones fundamentales que vinculan la eficiencia productiva con la maximización de ganancias.

T1. Si la actividad z^* maximiza la ganancia con el sistema de precios $p > 0$, entonces z^* es eficiente.

En efecto, supongamos que z^* no sea eficiente. Existe entonces otra actividad $z \geq z^*$. Puesto que $p > 0$ resulta $pz > pz^*$, lo cual es imposible por hipótesis.

T2. Si z^* es eficiente, existe un sistema de precios $p \geq 0$ con el cual z^* es una actividad maximizadora de ganancias.

La demostración se apoya en el siguiente hecho:

H1. Sean K y L dos conjuntos convexos disjuntos en un espacio lineal X.

Si uno de ellos tiene un punto interno, existe una funcional lineal no nula que separa K y L (Royden, 1968, pág. 204).

Mediante este teorema de separación la prueba de T2 es inmediata. Llamemos X a la diferencia vectorial Z — z*. X es convexo, debido a la convexidad de Z (postulados A6 y A7) y no contiene ningún elemento $x \geq 0$, por la eficiencia de x^*. También es convexo el conjunto de los elementos $x \geq 0$ en $(E')^n$. Ambos conjuntos poseen puntos internos. Invocando H1 podemos entonces asegurar (si es necesario, mediante un cambio de signos) la existencia de un sistema de precios $p \geq 0$ tal que

$$p(x) \leqq 0$$

para todo $x \in X$. Esto equivale a decir que

$$p(z) \leqq p(z^*)$$

para cada actividad $z \in Z$, según lo afirmado por T2.

Los enunciados T1 y T2 son idénticos a los que describen las relaciones entre eficiencia y maximización de ganancias para conjuntos de producción ordinarios. Debemos notar que los sistemas de precios definidos como elementos de $[(E')^n]'$ pueden traducirse en términos de *precios individuales* para los diversos bienes. Esta propiedad nace del siguiente hecho:

H2. Sea $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios lineales topológicos, y sea $V = \Pi_\alpha V_\alpha$. El dual V' de V es algébricamente isomorfo a la suma directa de los duales V_α' (Schaefer, 1980, pág. 127). Se deduce de H2 que la ganancia obtenida mediante la actividad z con el sistema de precios p puede representarse en la forma:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(z_i),$$

donde p_i pertenece a E''. De tal manera, la fórmula anterior constituye una generalización natural de la expresión algébrica corriente de la ganancia, como la suma de las cantidades de productos menos las cantidades de factores evaluados a sus respectivos precios.

Debe advertirse por otra parte que p(z) es discontinua respecto del par de variables p y z: si ambas convergen a 0, p(z) no tiende necesariamente a 0. Sin embargo, si Y es un subconjunto acotado de Z, la forma bilineal restringida p(z), $z \in Y$, es continua. Esto es lo que importa desde el punto de vista económico, pues la elección del productor se circunscribe siempre a un subconjunto acotado de Z.

La meta final de todo análisis sobre conjuntos de producción consiste en determinar la *oferta del productor*. Dado un sistema de precios p, elegido arbitrariamente, puede no existir una ganancia máxima. Concentramos nuestra atención, por lo tanto, en el subconjunto P de sistemas de precios para cada uno de los cuales el respectivo conjunto de actividades maximizadoras de ganancias no es vacío. Sea $Q(p)$ el conjunto de esas actividades para el sistema de precios p. La aplicación

$$Q: P \rightarrow Z: p \rightarrow Q(p)$$

que, en general, es una función de punto a conjunto, define la oferta del productor asociada al conjunto de producción Z.

La aplicación Q posee las propiedades normales de las correspondencias de oferta. En primer lugar, es positivamente homogénea de grado cero. La relación $y \varepsilon Q(p)$ significa que $p(y) \geqq p(z)$ para toda actividad $z \varepsilon Z$, pero esto a su vez implica que $tp(y) \geqq tp(z)$ para todo número $t > 0$. Por consiguiente, $y \varepsilon Q(tp)$. Como el raciocinio puede hacerse utilizando el multiplicador $1/t$, se infiere que $Q(p) = Q(tp)$.

En segundo lugar, el "efecto de sustitución" es no negativo. Si $y \varepsilon Q(p)$, $y' \varepsilon Q(p')$, valen las fórmulas $p(y) \geqq p(y')$, $p'(y') \geqq p'(y)$, de las que resulta $(p' - p)(y' - y) \geqq 0$. Supongamos que p y p' sólo difieren en el precio del bien h, o sea que $p_h \neq p'_h$, $p_i = p'_i$ para $i \neq h$. El resultado asume entonces la forma: $(p'_h - p_h)(y'_h - y_h) \geqq 0$, que constituye la referida propiedad del efecto de sustitución.

La semicontinuidad superior de la aplicación Q, cuando la maximización de ganancias se restringe a un subconjunto compacto $Y \subset Z$, se desprende del "teorema del máximo" (Berge, 1966, pág. 123) por vía de la continuidad de $p(z)$, $z \varepsilon Y$, y de la aplicación constante $p \rightarrow Y$.

Debemos hacer ahora una observación general. Aunque el concepto de conjunto de producción permite un tratamiento nítido de los problemas de eficiencia y maximización de ganancias, desdeña en realidad una parte de la información tecnológica al considerar únicamente el resultado *neto* de la producción. Para algunas cuestiones de análisis económico conviene emplear toda la información tecnológica disponible. Esto se logra, respecto de conjuntos de producción ordinarios, a través de la denominada "versión stock del conjunto de producción", que especifica las cantidades *brutas* de factores y de productos para cada proceso productivo. Una construcción similar puede hacerse con referencia a los conjuntos de producción distribucionales. Llamaremos *conjunto tecnológico* a la versión stock del conjunto de producción.

Para caracterizar el conjunto tecnológico representaremos la producción mediante un par

$$(x,y) \in (E')^m \times (E')^n, \ x \geqq 0, \ y \geqq 0,$$

donde y designa los productos obtenidos mediante los factores x. Diremos que (x,y) constituye un *proceso de producción.* Sin pérdida de generalidad podemos suponer $m = n$, estipulando que si algún bien sólo desempeña el papel de factor o de producto la componente respectiva del otro vector es la distribución nula. El conjunto tecnológico, que llamaremos Y, se define como el conjunto de todos los procesos de producción posibles bajo condiciones tecnológicas determinadas. La relación entre Y y Z es obvia: si $z \varepsilon Z$, existen x e y tales que $(x,y) \varepsilon Y$, $y-x = z$; si $(x,y) \varepsilon Y$, entonces $z = (y-x) \varepsilon Z$.

Los postulados que habitualmente se enuncian para la versión stock del conjunto de producción ordinario pueden extenderse a Y:

B1. Posibilidad de la inacción:

$$(0,0) \varepsilon Y.$$

B2. Posibilidad de la acción:

$$\exists (x,y) : (x,y) \neq (0,0), \ (x,y) \epsilon Y.$$

B3. Imposibilidad de la producción gratuita:

$$[(x,y) \varepsilon Y, \ x = 0] \Rightarrow y = 0.$$

B4. Libre disposición:

$$[(x,y) \varepsilon Y, \ u \geqq x, y \geqq v] \Rightarrow (u,v) \epsilon Y.$$

B5. Continuidad:

$$[(x_j,y_j) \rightarrow (x,y), \ (x_j,y_j) \varepsilon Y] \Rightarrow (x,y) \varepsilon Y.$$

B6. Divisibilidad:

$$(x,y) \varepsilon Y \Rightarrow (\lambda x, \lambda y) \varepsilon Y, \text{ para todo } \lambda \varepsilon (0,1) \subset R.$$

B7. Aditividad:

$$[(x,y) \varepsilon Y, \ (u,v) \varepsilon Y] \Rightarrow (x+u, y+v) \epsilon Y.$$

En B1-B3 el símbolo 0 significa la distribución nula; en B5 la convergencia se entiende en el sentido del espacio $(E')^{2n}$. Aunque similares a los axiomas A1-A7, los postulados que acabamos de introducir no son siempre equivalentes a ellos. Verbigracia,

$$B1 \Rightarrow A1$$

pero no recíprocamente. Esto se debe a la diferencia ya señalada en el grado de detalle con que Z e Y reflejan los datos tecnológicos.

Con relación al conjunto Y la noción de eficiencia se define del siguiente modo: Un proceso (x,y) es *más eficiente* que un proceso (v,w) si

$$\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -v \\ w \end{pmatrix}.$$

Un proceso $(x,y) \varepsilon Y$ es *eficiente* si no hay en Y otro proceso más eficiente que (x,y).

No es difícil pasar del conjunto Y al operador T de nuestro trabajo anterior (1984). En realidad, basta una modificación parcial de los postulados precedentes para convertir a Y en la representación gráfica de T. La lista modificada de axiomas es la siguiente:

C1 = B1.

C2 = B2.

C3. Imposibilidad de la producción gratuita:

$$x(t) = 0 \text{ para todo } t < 0 \Rightarrow y(t) = 0 \text{ para todo } t < 0.$$

C4. Unicidad:

$$\text{Dado } x \varepsilon (E')^n \text{ hay un solo } y \text{ tal que } (x,y) \varepsilon Y.$$

C5 = B5.

C6. Homogeneidad:

$$(x,y) \varepsilon Y \Rightarrow (\lambda x, \lambda y) \varepsilon Y \text{ para todo } \lambda \varepsilon R.$$

C7 = B7.

Respecto de B3 y B6, los supuestos C3 y C6 son meras variantes formales sin consecuencias desde el punto de vista de las decisiones del productor. No así el supuesto C4, que excluye directamente la aplicabilidad de B4. En realidad C4 constituye una hipótesis más natural que B4 cuando, como en el presente análisis, los insumos están especificados completamente.

Con los postulados C1 – C7, el conjunto tecnológico es la representación gráfica del operador lineal, continuo y "causal"

$$T: (E')^n \rightarrow (E')^n: x \rightarrow T(x) = y,$$

donde $(x,y) \varepsilon Y$. La "invarianza en el tiempo", o sea la condición:

$$T\ (x(t+a)\ ) = y\ (t+a)$$

para todo número $a \varepsilon R$, refleja simplemente el hecho de que tanto Y como T están definidos para un *nivel dado* de conocimientos tecnológicos.

Importa señalar, por último, que los teoremas T1 y T2 siguen siendo válidos en el marco del conjunto Y, con obvias adaptaciones. El método de demostración es idéntico. También el concepto y las propiedades de la correspondencia de oferta permanecen intactas, según puede verificarse sin dificultad.

BIBLIOGRAFIA

BERGE, C., 1966. Espaces topologiques, fonctions multivoques, 2a. edición (Dunod, París).

KOOPMANS, T. C., 1957. Three Essays on the State of Economic Science (McGraw-Hill, N. York).

OLIVERA, J. H. G., 1984. "Producción y tiempo: teoría distribucional", Anal. Acad. Cs. Ex. Fís. Nat., tomo 36, págs. 93-95.

ROYDEN, H. L., 1968. Real Analysis, 2a. edición (Macmillan, N. York).

SCHAEFRER, H., 1980. Topological Vector Spaces (Springer, N. York).